اصول علم ہندسہ

معروف بہ

تحریر اقلیدس

شرح مقالہ اول و دوم و سوم و چہارم

ٹوڈہنٹر صاحب کی انگریزی اقلیدس سے منشی کالی پرشاد [illegible] میور کالج الہ آباد نے

اردو مین ترجمہ کیا

تیسری دفعہ صحیح ہوکر

۱۸۷۵ء

مطبع مرتضوی دہلی مین باہتمام حاجی عزیز الدین کے چھپا

حواشی مقالہ اول

اصول علم ہندسہ اقلیدس معروف تحریر اقلیدس

اصول جمع اصل معنی بیخ و بن و نیز اوس انگریزی لفظ کا ترجمہ یہہ ہے اوسکی معنی اس محل پر
مبادی علم کے ہین

علم اصطلاح مین ان تصورات اشیا کو کہتے ہین جو عقل مین آتی ہین

ہندسہ معرب اندازہ کا ہے جسکی معنی پیمایش کے ہین مگر یہہ ترجمہ جیومٹری کا ہے جو دو یونانی لفظون سے
مرکب ہے اور انکا لفظی ترجمہ پیمایش زمین ہے سلئے اصل معنی کا تو مقتضا یہہ تہا کہ اوس فن کو کہتے
جسمین زمین کی پیمایش کا بیان ہوتا مگر اب اوس علم کو کہتے ہین جسمین مقادیر متصلہ خطوط سطوح
و اجسام کی پیمایش سے بحث کیجاتی اور اوسمین ونکے احکام اور نسبتون اور تعلقات کا بیان ہو

اقلیدس نام ایک حکیم کا ہے جسکا مولد تحقیق نہین معلوم ہوا اسکندریہ کے مدرسہ مین اوسنے
تعلیم پائی تہی اور فلاطون کے فرقہ کا طالب علم تہا سنہ ۳۲۳ و ۲۸۳ پیشتر حضرت عیسیٰ کے درمیان وہ پیدا ہوا
اوسنے اس علم کی ایسی ترتیب دی اور تہذیب کی کہ اوسکا نام ہی علم ہندسہ کا دوسرا نام ہوگیا اور اقلیدس اور
ہندسہ ہم معنی ہوگئی اوسکی تصنیفات سے علاوہ اس کتاب کے اور بہت سی کتابین مثلاً معطیات اقلیدس اور بہت سے
رسالے مین ہمین کلام ہے کہ آیا وہ مصنف اس کتاب کا ہے یا مولف غالباً یہی ہے کہ اوسنے وہ سب
اشکال ہندسیہ جو اوسوقت تک تالیف ہوئی تہین جمع کین اور بہت سی شکلین اپنی فکر
دقیق سے ایجاد کرکے شامل کین اوسنے تیرہ مقالہ لکہے ہین جنمین سے نو مین خطوط و
سطوح و اجسام کا ذکر کیا ہے اور چار مین خواص اعداد بیان کئے ہین اور وہ حکمت بیان کی ہے
جسسے یہہ اعداد خطوط وغیرہ کی پیمایش کے کام مین آسکتی ہین اور بعد ازان اور مقالہ اوسپر

مزید ہو کے بعض تمنیفین اسکی طرف منسوب ہین اوقلیدس اور اس علم کی ترقی و تنزل کا حال اتنا بڑا ہے کہ اوسکے لکھنے کے لئے ایک جدا کتاب چاہیے اسلئے فقط اس مختصر حال پر اکتفا کرتے ہین کہ نہ اوقلیدس جیسا کوئی مدون اس علم کا اس مدت دراز مین پیدا ہوا اور نہ کوئی کتاب اس علم کی ایسی تصنیف ہوئی کہ اوسکی کتاب سے ہم پایہ ہوتی

تحریر اقلیدس اوس ترجمہ کا نام ہے جو محقق طوسی نے عربی زبان مین لکھا ہے اسی نام سے یہہ کتاب مشہور ہو رہی ہے اور ہر ترجمہ کو تحریر اقلیدس کہنے لگے ہین

حدود

حدود جمع حد اور حد ایک قسم معرف کی ہے جسمین تعریف کسی شے کی ذاتیات سے کیجاتی ہے اور تعریف سے دو باتین مقصود ہوتی ہین کہ شے کی ذاتیات پر مطلع ہونا یا جمیع اعتبار سے اوس شی کا ممتاز ہونا اس انگریزی لفظ کا یہہ ترجمہ ہے اوسکے معنی یہہ ہین کہ الفاظ یا اصطلاحون کے معنی اسطرح بیان کرین کہ جو مصداق اون الفاظ کا ہو وہ سمجھہ مین آئے یعنی کسی شے کی خاصیتون کا بیان مختصر ایسا ہو کہ ادنسے وہی شے سمجھہ مین آتی ہو

حکماء قدیم نے علم ہندسہ کی تعریف اسطرح کی ہے کہ وہ علم ریاضی کی فرع ہے اور علم ریاضی علم حکمت نظری کی فرع ہے اور حکمت نظری حکمت کی ایک فرع ہے اور حکمت اس کا نام ہے کہ حقیقت اشیاء جسطرح کہ وہ نفس الامر مین ہون بقدر طاقت بشری معلوم کی جائین اور اوسکے تین قسمین کی ہین جنمین سے ایک ریاضی ہے جسمین اون امور سے بحث کی جاتی ہے کہ وجود خارجی مین تو مادہ کے محتاج ہون مگر تصور عقلی مین محتاج مادہ کے نہ ہون یہہ علم حکمت نظری کی فروع مین سے ایک فرع نہایت کامل ہے اور اوسکی بربادی وہ یقینات ہین جو تجربات اور مشاہدات سے استقرار ہوتی ہین اولیات اس علم کی ایسی قیاسات ہین جو حواس ظاہری کی وساطت سے عقل مین آتے ہین اور انکا بڑا کام اس علم مین یہہ ہے کہ

کہ ذات اشیا اور اونکے تصورات مین تمیز پیدا کر دین

قیاسات جو فرض کئے جاتے ہین وہ برخلاف اصل ماہیت اشیا کی نہین ہوتے اسلئے اونکو یہہ
نہین کہہ سکتے کہ خود مختاری سے خواہ مخواہ فرض کر لئے ہین بلکہ بعض لحاظ مین وہ بالکل
مطابق اون تصورات اشیا کی ہوتے ہین جو وہ اشیا بوساطت حواس کے نفس مدرکہ انسانی
مین پیدا کرتے ہین یہان لفظ قیاس کے معنی بیان کرنے ضرور ہین تاکہ مطلب طالب علمون کی
سمجھہ مین آجائے قیاس وہ قول ہے جو کئی قضیون سے ملکر بنی اور اوسکی مان لینے سی دوسرے ایک
قول کا ماننا ضرور ہو جائے اور اسکو نتیجہ کہتے ہین جس انگریزی لفظ کا یہہ ترجمہ ہی اوسکا ٹھیک
ترجمہ ان لفظون مین ہی کہ ایک قول کو مان لین جسسے نتیجہ نکل آوے یا ایک بات ثابت تو نہ ہو مگر
اوسکو ایک برہان کرنے کے لئے مان لین یا ایک مقدمہ کی ثابت کرنیکے لئے فرض کر لین جہان یہہ لفظ
لکھا ہے وہان اوسے مطلب نکالا ہی ہے

تجربات اور مشاہدات سے ہم کو خاص صورت کی مقدارون پر علم ہوتا ہے اور پہر ان جزئیات کے
حال کو دیکھکر کلیات پر استدلال کرتے ہین

متقدمین اور متاخرین مین بعض کی رای یہہ ہے کہ علم ہندسہ کے قیاسات کا تعلق کچھہ مشاہدہ اور تجربہ
پر انسان کے موقوف نہین ہے اور ہمین تصدیقات یقینیہ مین کہ وہ نہین کسی زمانہ مین کچھہ خلل ہین
واقع ہو سکتا ہمیشہ اونکا حال یکسان رہیگا مگر یہہ بات یاد رکہنی چاہیے کہ گو وہ تصورات عقلی
ایسی ہین کہ کبھو کسی تجربہ کے محتاج نہ ہون

مگر جسطرح اب وہ انسان کی عقل مین آتی ہین اوس طرح وہ اوسوقت نہ آتے تھے کہ اول ہی اول
ظاہر ہوئے نفس مدرکہ انسانی ایسا ہی کہ اوسکو علم بتدریج حاصل ہوتا ہے اور جتنے معلومات ہوتی
جاتی ہے اوسے مجہولات کا استنباط کرتا ہے گویا ہر قدم پر ایک بات کا معلوم ہونا کسی مجہول
کے دریافت کرنے کی تمہید ہی یہہ صحیح نہین معلوم ہوتا کہ اگر دائرہ اور مثلث کا وجود خارج مین
آدمی کی نظر نہ پڑتا تو وہ اوسکے سبب خاص کو دریافت کر لیتا قاعدہ ہی کہ ہر انسان کا علم تجربہ اور

مشاہدہ پر موقوف ہی اول انسان کے نفس مدرکہ مین محسوسات سے تصورات پیدا ہوتے ہین اور
وہ جزئیات پر نظر کرنے سے کلیات کا استنباط بہ استدلال کرتا ہے
ضرور ہے کہ علم ہندسہ کے اصول اول مبادی آدمی کے تجربہ اور مشاہدہ مین آئے ہون اور حواس کے
ذریعہ سے اونکا ادراک ذہن مین ہوا ہو پہر اوسے آگے بتدریج یہہ علم محض تصورات بن گیا ہو
تاریخ سے بہی اسیطرح ثابت ہوتا ہے غرض جسطرح اور علم مشاہدہ اور تجربہ پر موقوف ہین
اسیطرح یہہ علم بہی اونہین پر منحصر ہے
الفاظ کے معنی سمجھہ مین اچھی طرح نہین آتے جب تک اونکا مصداق موجود نہ کیا جائے خط
مستقیم اچھی طرح سمجھہ مین نہین آئیگا جب تک وہ کہینچا نہ جائے اور پہر اوسکے مقابل خط منحنی
کہینچکر باہم اونمین تمیز نہ کیجائے جبتک یہہ نہو تعریف خط مستقیم کی اچھی طرح سمجھہ مین نہین
آئیگی یہہ تو الفاظ مفرد کی کیفیت ہی اور جب وہ مرکب ہون تو اونمین ہر لفظ مفرد کے معنی
جب تک اسطرح سمجھہ مین نہ آئین الفاظ مرکب سمجھہ مین نہ آئینگے
حدود اقلیدس دو قسم کے ہین ایک قسم تو اونکی یہہ ہی کہ الفاظ جو اس علم مین کام مین آتے ہین
اونکے معنی بہ توضیح بیان کئے جائین
دوسری قسم یہہ ہے کہ علاوہ معنی بیان کرنیکے وہ یہہ بہی بیان کرین کہ وجود اون اشیا کا
جنکی تعریف الفاظ مین بیان کی ہے وجود رکہتے ہین حدود مین صرف اون اشیا کی
تعریف جنکے نام اس علم مین لئے جاتے ہین ہوتی ہے کچہہ اونکی شکلون کی خاصیت سے بحث
نہین ہوتی اور یہہ اسی علم کے ساتہہ مخصوص ہے کہ اونکے حدود مین مثل اور علمون کے نئی معلومات
سے تغیر و تبدل نہین ہوتا
حدود اقلیدس ظاہر محسوسات مین سے معلوم ہوتے ہین بعض شکلین جنپر سارے علم کی بنا ہی وہ
تجربہ و مشاہدہ سے ثابت ہوئی ہین مثلاً شکل چہارم مقالہ اول محض تجربہ پر موقوف ہے اور یہی کار آمد
جسکے سبب سے اور شکلین آگے کی ثابت ہوتی ہین اوسکے ثبوت کو دیکھیئے تو ہر قدم پر ایک حس

کام کر رہی ہے خطوں کا خطوں پر اور زاویہ کا زاویہ پر اور آخر کو سطح کا سطح پر منطبق ہونا حواس سے معلوم ہوتا ہے اور اسی سے اونکی مساوات کا نتیجہ نکلتا ہے اول یہہ بات ایک مثلث میں معلوم ہوئی ہوگی پس اس جزئی خاص سے استدلال کلی پر کیا ہوگا کہ ہر قسم مثلثوں میں جہنیں شرطیں وہ پائی جائیں جو پہلی جزئی کے قیاس میں ہیں اونمیں مساوات ثابت ہی اور اوسکی وہی دلیل ہے جو اوس جزئی خاص میں تہی غرض سے معلوم ہوا کہ یقینات ہندسہ حس ظاہری کے واسطہ سے حاصل ہوتے ہیں

سمسن صاحب کا اکثر ذکر آئیگا کہ سلئے اونکا حال بیان کیا جاتا ہے کہ اونہوں نے اصل یونانی اقلیدس سے انگریزی میں ترجمہ کیا ہے اور اونہیں کا تتبع اور مہندسین نے کیا ہے

حد ا - تیون نے جو تعریف نقطہ کی لکہی ہے وہ سمسن نے اختیار کی ہے اقلیدس نقطہ کی تعریف اسطرح کرتا ہے کہ نقطہ وہ ہے جسکا کوئی جز نہو یعنی جسکی تجزی اور تقسیم مثل خط وزاویہ وسطح وجسم کی نہو سکے - نقطہ کے معنی سب جانتے ہیں اگر اوسکے لفظی معنی پر خیال کریں تو اوس سے وہ ہرگز مفہوم نہوگا جو نقطہ سے اقلیدس میں ہونا چاہیئے اقلیدس نقطہ کی تعریف میں ایک قضیہ سالبہ بیان کرتا ہے یعنی ایک خاصیت کی نفی کرتا ہے جو نقطہ کے لفظی معنی سے بالکل جدا ہے ہندسہ میں جو اوسکے معنی ہیں وہ اوس نشان سے جو محسوس ہوتا ہے بالکل مبرا ہیں - فیثاغورس نقطہ کی یہہ تعریف کرتا ہے کہ وہ جز لاتتجزی ہے (یعنے ایسا جز جسکا جز نہو سکے) جو مقام رکہتا ہے جب وجود مقام اور عدم مقدار کے تصوروں کو جمع کریں تو نقطہ کے معنی یہہ سمجہہ میں آئینگے کہ نقطہ وہ ہے جو مقام رکہتا ہی لیکن مقدار نہیں

حد ۲ جو خط محسوس ہوتا ہے وہ ضرور طول و عرض دونو رکہتا ہے اور یہہ ناممکن ہے کہ کوئی خط بغیر عرض کے کہنچ سکے مگر خط کی تعریف کے موافق خط کے تصور میں فقط طول ملحوظ رہتا ہے عرض سے قطع نظر کیجاتی ہے

حد ۳ اس خط کی تعریف سے نقطہ کے معنی خوب سمجہہ میں آتے ہیں ورا وسیر ہم اور یہہ زیادہ کرتے ہیں

کہ دو خط ایک نقطہ پر تقاطع کرتے ہین اور دو خط ایک دوسرے کو صرف ایک ہی نقطہ پر تقاطع
کر سکتے ہین ۔

حد ۴ خود خط مستقیم کے ہی الفاظ ایسے صاف و بامعنی ہین کہ اور الفاظ اون سے زیادہ اوسکی تعریف کر لیے
نہین ہو سکتی قاعدہ ہے کہ لفظ مفرد کا جو مصداق ہوتا ہی اوسکی تعریف الفاظ مین کرنی مشکل ہوتی ہے
مثلاً لفظ مفرد دانا کا جو مصداق ہی اوسکے اور الفاظ مین تعریف کرنی مشکل ہے اقلیدس نے یہہ لکھا ہی کہ خط مستقیم
وہ ہی جو اپنی اطراف مین ہموار واقع ہو یعنی کوئی جز اوسکا اونچا نیچا نہ ہو یعنی دو طرفین اوسکے جو سطح
مستوی پر مقرر کیجائے اوس مین کسی سے انحراف نکری اور اس تعریف سی خط مستقیم اور خط منحنی مین تمیز ہو جاتی
ہی جب خط مستقیم ایک سطح مستوی پر واقع ہو تو اوسکی دو سمتین ہوتی ہین اور جب کوئی سمت خط کی
معلوم ہوتی ہے تو اوسکو معلوم المقام کہتے ہین اور جب اوس خط کا طول معلوم ہو یا معلوم
ہو سکتا ہو تو اوسکو معلوم المقدار کہتے ہین خط مستقیم کی حد سے یہہ مفہوم ہوتا ہی کہ دو نقطے خط کا مقام
متعین کرتے ہین اور اسی پر اول اور دوم اصول موضوعہ مبنی ہین اور اسی سے معلوم ہوتا ہے کہ جب خطوط
مستقیم دو یا زیادہ نقطون پر منطبق ہون تو وہ خطوط ایک ہی خط مستقیم کہلاتا ہے اور اسکے یہی معنی
ہین جو ۱۴ اص م مین بیان کئے گئے ہین کہ دو خط مستقیم کا ایک خط مستقیم حصہ مشترک نہین ہو سکتا تعریف
خطوط مستقیم کی اسطرح سی بھی بیان کی گئی ہے کہ وہ خطوط ہین جو اگر دو نقطون پر منطبق ہو جائین
تو اونکو جہانتک خارج کرو منطبق ہوتے جائین اس تعریف کی وہی کیفیت ہی جو گیارہوین علوم
متعارفہ کی ہے کہ زاویے قائمے سب آپسمین برابر ہوتے ہین اور اسیطرح خطوط مستقیم وہ ہین
جو آپسمین منطبق ہوتے ہین اگر برابر طول رکھتے ہین تو بالکل اور اگر غیر مساوی طول رکھتے ہین تو
بالجز منطبق ہوتے ہین ۔ مگر حدود کی خوبی یہہ ہی کہ اوسمین کسی چیز کی تعریف کیجائے نہ یہہ
اوسمین مقابلہ صفات ذاتیہ کا کیا جائے اور اوسکے ضمن مین کوئی علوم متعارفہ آجائے

حد ۵ اقلیدس نے تعریف سطح مستوی کی یہہ کی تہی کہ سطح مستوی وہ ہے جو درمیان خطوط مستقیم
کے جو اوسکے اندر ہون ہموار واقع ہو یعنے سب جز اوسکے مقابل ہون کوئی اونچا نیچا نہ ہو

مگر ہمسن نے سطح مستوی کی وہ تعریف کی جو ہیرو اعظم نے لکہی تہی سطح مستوی ہر مقام مین
واقع ہو سکتی ہے اور ہر سمت مین غیر متناہی پہیل سکتی ہے

حد ۸ ہمسن نے لکہا ہی کہ اقلیدس نے زاویہ سطحہ کی تعریف ایسی کی ہے جو اوس زاویہ پر کہ دو
خطوط منحنی سے یا ایک خط مستقیم اور دوسرے خط منحنی سے یا دونو خطوط مستقیم سے پیدا ہو صادق
آتی ہے مگر سارے اقلیدس مین فقط بیان آخر زاویہ کا ہے غرض تعریف زاویہ مستقیمۃ الخطین
کی ناتمام کی ہے باقی نکمی ہے

حد ۹ زاویہ بہی ایک قسم کی مقدار ہی اسلیے کہ ایک زاویہ دوسرے زاویہ سی بڑا اور چہوٹا اور برابر
ہو سکتا ہی خود زاویہ اور دو زاویونکی مجموعہ اور تفاوت کی مفہوم کو خوب ذہن نشین کرنا چاہئی
زاویہ کی معنی گوشہ کے ہین اور ہندسہ مین اوسکا مفہوم وہ کشادگی ہے کہ ایک نقطہ سے
دو خطون کے پہیلنے سے پیدا ہو زاویہ کی تعریف سے معلوم ہوتا ہے کہ اون خطوط کے
طول پر جنسے کہ زاویہ پیدا ہوتا ہے کچہہ مقدار زاویہ کی موقوف نہین بلکہ وہ موقوف
اوس کشادگی پر ہے جو ایک نقطہ پر درمیان دو خطوط مستقیم کے ہوتی ہے اور اوسکا
بیان آگے حدود مین کیا گیا ہے جس نقطہ پر دو خط ملتی ہین اوسکو نقطہ زاویہ یا نقطہ راس یا وسیا
راس زاویہ کا کہتے ہین زاویہ کی مقدار کے ساتہہ اوربازون کو نہین ملانا چاہئی زاویہ قائمہ کی مقدار
مستقل معین ہو گئی ہے اوسمین کچہہ فرق نہین پڑتا اسلیے اوسکو پیمانہ اور زاویہ کی اندازہ کرنیکے
لئے مقرر کیا ہے اور اسی اندازہ سی زاویونکا آپسمین مقابلہ کرتے ہین - دو خطوط مستقیم جو تقاطع کرتے
ہون یا خارج ہونیسے متقاطع ہو جائین تو انکو کہتے ہین کہ وہ ایک دوسرے سی میل کہتے ہین اور اس میلان
کی مقدار اوس زاویہ سی معلوم ہوتی ہے جو وہ ایک دوسرے کے ساتہہ بناتے ہین
جب دو خطوط مستقیم ایک ہی نقطہ پر ختم ہون یعنی جب ہر ایک خط کے ایک ایک طرف منطبق
ہون اور خواہ وہ دونون خط ایک سمت مین ہون یا نہ ہون اونکو متحد الطرف کہتے ہین

حد ۱۰ اقلیدس نے سب جگہ اس بات کو مانا ہے کہ ایک خط مستقیم دوسرے خط

مستقیم پر عمود ہو تو دوسرے خط مستقیم پہلے خط مستقیم پر عمود ہوگا دلیل اسکی یہہ ہے کہ فرض کرو کہ ءس عمود خط اب پر ہے اور شرط امکان یہہ بہی فرض کرو کہ ءس ہی عمود دوسرے خط اب پر نہیں ہے

چونکہ ءس عمود اب پر ہے زاویہ ب ءس برابر ہے زاویہ اءس کے اور چونکہ ءس عمود اب پر ہے زاویہ باس برابر ہے زاویہ اءس کے لیکن ب ءس کم بہ نسبت ب ءس کی ہے اور اءس بڑا بہ نسبت اءس کے اسواسطی ایک ہی مقدار جو برابر مقدارون مین ایک سے کم ہے برابر ایک ایسی مقدار کے ہوئی جو اون دو برابر مقدارون مین سے ایک مقدار کی برابر ہے اور یہہ ناممکن۔ اسیواسطی نقطہ ء سے دو عمود ءس اور ءس کا خط مستقیم اب پر قائم ہونا ناممکن ہے

حد ۱۶ دائرہ کی تعریف مین اقلیدس نے کوئی ترکیب دائرہ کہینچنے کی نہین بتلائی حدود مین صرف یہہ بیان کیا ہے کہ دائرہ کیا ہے اور ایک خاصیت اوسمین ایسی ہے جو کسی اور شکل مین نہین ہے۔ اقلیدس ہمیشہ اپنے اصول کے بیان کرنے مین کوئی حکمت عملی نہین بیان کرتا جسسے خط مستقیم یا دائرہ پیدا ہو۔ دائرہ کی تعریف اسطرح بہی ہو سکتی ہے ایک محدود خط مستقیم اپنے ایک طرف قائم کے گرد کسی سطح مستوی مین گردش کرکے پہر اپنے اصلی مقام پر عود کرے تو سطح جسپر یہہ خط متحرک پہرا ہے اوسکو دائرہ کہتے ہین اور وہ خط جو خط مستقیم کے دوسری طرف کی حرکت سے پیدا ہوا ہے محیط دائرہ کہلاتا ہے اور خط متحرک نصف قطر اور نقطہ ساکن جسکے گرد خط حرکت کرتا ہے مرکز دائرہ کہلاتا ہے

اقلیدس نے یہہ ترکیب عملی تو دائرہ کی تعریف مین نہین داخل کی لیکن یہہ مانا کہ دائرہ کہنچ سکتا ہے اور تیسرے اصول موضوعہ سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ترکیب مذکور اقلیدس کے ذہن مین تہی مگر اوسنے پہلے مقالہ کے اصول مین اوسکو نہین داخل کیا۔ گیارہوین مقالہ مین مخروط مستدیر اور سطوانہ مستدیر کی تعریف مین اشکال مستدیر کو ایک طرف قائم کے گرد متحرک ہونیکا حال لکہا ہے

اقلیدس نے گویہہ فرض کرلیا ہے کہ قطر دائرہ کو برابر حصون مین تقسیم کرتا ہے مگر تہیا اس بات کو سطح ثابت کرتا ہے فرض کرو کہ ایک حصہ دائرہ کا دوسرے حصہ پر دائرہ کے سطح چسپان کیا جائے کہ مرکز مرکز پر قطر قطر پر منطبق ہو اگر دونو محیط کے حصے اسمین منطبق نہون تو ایک حصہ دب برابر ہوگا کل اح کے کیونکہ ہر ایک اونمین کا ایک ہی دائرہ کا نصف قطر ہے اور یہہ ناممکن ہے سواسطی دونو حصے محیط کے اسمین منطبق ہوتے ہین اور قطر دائرہ کی تنصیف کرتا ہے

حد ۱۹ اس حد کو پرقلس نے پہر دوبارہ داخل کیا ہی سواسطی کہ اوسکے معنی (۱۴ اش ام) اول صورت (۳۳ ش ۳م) اور (۱۳ اش ۴م) مین کام مین آتی ہین قطعہ کی تعریف کا کہین کام اس مقالہ مین نہین پڑا اور تیسرے مقالہ مین جب تک صفات دائرہ سے بحث نہین ہوئی اوسکی ضرورت نہین پڑی

پرقلس اس حدود پر یہہ لکہتا ہے کہ اسی حد سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز تین جگہہ ہوتا ہے یعنے شکل کے اندر ہوتا ہے جیساکہ دائرہ مین یا شکل کی حد مین جیساکہ نصف دائرہ مین یا باہر شکل سے جیساکہ بعض مخروطی خطوط مین

حد ۲۴-۲۹ تین قسم کے مثلث باعتبار اضلاع کے اور تین قسم کے مثلث باعتبار زاویہ کے ہوتے ہین اور پہر اونہین مثلثون کے باعتبار دونو ضلع اور زاویہ کے ہوسکتی ہین ہمسن نے مثلث متساوی الساقین کی تعریف مین لفظ صرف کا جو دو ضلعون کے ساتہہ لگایا گیا ہے فضول ہے دور کرنیکے قابل ہے کیونکہ (۵ ش ام) کے نتیجہ مین مثلث متساوی الساقین کو مثلث متساوی الاضلاع اور مثلث متساوی الاضلاع کو متساوی الساقین ۱۵ اش ۴م مین خیال کیا ہے مثلث حادۃ الزوایا کی حدود پر یہہ اعتراض ہوا ہے کہ یہہ بات کہ مثلث کی تینون زاوئے حادہ ہون حدود کیطرح تسلیم نہین ہوسکتے اس اعتراض کا یہہ جواب ہوسکتا ہی کہ جسطرح کے تین قسم کے زاوئے

بیان ہوئے اور سطح کی مثلث بیان ہوئے ہین تاکہ اونمین تمیز ہو جاے اور مثلث متساوی الاضلاع
کی تعریف پر یہہ اعتراض ہوا ہے کہ اول یہہ ثابت کرنا چاہیے کہ مثلث کا ایسا ہونا ممکن ہے کہ اوسکے
تینون ضلعے آپسمین برابر ہون جب تک امکان اس بات کا نہ ثابت ہو تب تک تعریف مہمل ہے
اسلئے یہہ تعریف ہونی مناسب ہے کہ اگر کوئی مثلث ایسا ہو کہ اوسکے تینون ضلعے آپسمین برابر ہون
تو اونکو مثلث متساوی الاضلاع کہو ۔ مثلث قائم الزاویہ اور منفرج الزاویہ کی تعریف پر اعتراض
ہوا ہے کہ جب تک ۳۲ شکل اول نہ ثابت ہو یہہ نہین معلوم ہو سکتا کہ ایک ہی مثلث قائم الزاویہ اور
منفرج الزاویہ نہین ہو سکتا اسلئے ۳۲ شکل اول یہہ حدود بے محل ہین اور ایک اعتراض زاویہ منفرجہ
اور زاویہ حادہ کی تعریف پر بھی ہوا کہ گیارہ علوم متعارفہ مین یہہ کہا ہے کہ زاویے قائمے
سب آپسمین برابر ہوتے ہین اسی لیے یہہ ہو سکتا ہے کہ ایک زاویہ ایک قائمہ سے بڑا ہو اور دوسرا
قائمہ سے چہوٹا ہو یعنے حادہ بھی ہو اور منفرجہ بھی ہو

حدود ۳۰ سے ۳۴ تک اشکال ذوات الاربعۃ الاضلاع کی تعریف پر اعتراض ہوا ہے سوا منحرف کے
اور سب شکلین متوازی الاضلاع سے مفہوم ہو سکتی ہین لیکن اقلیدس نے خطوط متوازیہ کی تعریف بعد
اشکال ذوات الاربعۃ الاضلاع کی لکھی ہے اسلئے ان شکلون کی تعریف اوسیطرح ہو سکتی ہے جسطرح
اقلیدس نے لکھی اور اسکے سوا کوئی اور ترکیب نہین ہو سکتی بعض نے کچھہ الفاظ بدل کر اسطرح ترمیم
حدود کی کی ہے ۔ مربع وہ ذوات الاربعۃ الاضلاع ہے جسکے چارون ضلعے آپسمین برابر ہون اور
ایک زاویہ قائمہ ہو اسلئے کہ ۴۶ شکل اول مین ثابت ہوا ہے کہ جس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ
ہو اوسکے سب زاویے قائمے ہوتے ہین مربع کی تعریف پر بھی اوسی قسم کا اعتراض ہوا ہے
جو مثلث متساوی الاضلاع پر ہوا تہا
مستطیل وہ ہے جسکے مقابل کے ضلعے آپسمین برابر ہون اور ایک زاویہ قائمہ ہو
شبیہ بالمعین وہ ذوات الاربعۃ الاضلاع مستوی ہے جسکے مقابل کے دو دو ضلعے آپسمین برابر ہون
اور زاویے قائمے نہون ایک ذوات الاربعۃ الاضلاع منحرف جسکے دو ضلعے متوازی ہون ذو نعش کہلاتی ہے

حد ۲۰ یہہ ممکن ہے کہ دو خط خارج ہونیسے دونو طرف آپسمین کہیں نہ ملین مگر متوازی بہی نہون

حد ۲۱ متوازی الاضلاع کے لفظی معنی تو یہہ ہین کہ وہ شکل جسکے ضلعے متوازی ہون اور جب کسی شکل کے مقابل کے ضلعے متوازی ہون تو اوسکے چار یا چہہ یا آٹہہ غرض جفت اضلاع ہوسکتے ہین لیکن اقلیدس مین صرف چار ہی ضلع کے شکل متوازی الاضلاع کا ذکر ہے

اقلیدس نے جسطرح براہین ہندسیہ کے بیان کرنے مین اسلوب ترکیبی کو اختیار کیا ہی اسیطرح حدود مین بہی ایسے ہی اسلوب کو برتا ہے اول نقطہ کی پہر خط کی بعد ازان زاویے کے اور اوسکے پیچہے سطح کی تعریف کی اور اونکے مختلف قسمین لکہی ہین اسطرح بیان کرنے مین بڑی دقتین عاید ہوتی ہین اور تصورات ہندسیہ اچہی طرح ذہن نشین نہین ہوتے بلکہ اوسکو یون بیان کرنا چاہیی تہا کہ ایک جسم لو اور اوسکی صفات طبیعیہ سے قطع نظر کرو تو خود بخود سطح کا جسنے وہ محدود ہے تصور پیدا ہوگا اور سطح کے تصور سے خطوط کا جو سطح کو گہیرے ہین تصور پیدا ہوگا اور پہر خط محدود سے نقاط جو اوسکے اطراف پر واقع ہین ہوا اسطرح ایک جسم سطح سے ایک یا ایک سے زیادہ خطوط سے محدود ہوتی ہے اور خط دو نقطون پر منتہی ہوتا ہی ایک نقطہ صرف مقام بتلاتا ہے اور خط امتداد رکہتا ہی صرف طول اور سطح کے دو امتداد ہوتے ہین طول اور عرض اس سے بسیط مفہوم ہوتا ہے اور جسم کے تین امتداد ہوتے ہین طول و عرض و عمق اور اس سے تعریف جسامت کی سمجہہ مین آتی ہے -

یہ بات بہی بیان کرنی چاہیی کہ دو نقطونکے معلوم ہونیسے خط مستقیم کا مقام معلوم ہوتا ہے اور تین نقطونکے معلوم ہونیسے بشرطیکہ وہ ایک خط مستقیم مین نہون سطح کا مقام معلوم ہوسکتا ہے

اصول موضوعہ

اصول موضوعہ وہ اصول ہین جنکو سب نے تسلیم کرلیا ہو ؛

اگرچہ جابجا خطوط مستقیم اور دائرونکے کہینچنے کی ضرورت ثبوت دعوی اقلیدس مین پڑتی ہی لیکن اقلیدس نے کوئی ترکیب خطوط مستقیم اور دائرے کہینچنے کی نہین بتلائی خطوط مستقیم کہینچنے کی لئی مسطر اور دل سے زیادہ اور دائرہ کی کہینچنے کے لئے پرکار سے زیادہ کوئی اچہا اوزار نہین ہے ؛

حدود سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط اور دائرہ کا وجود ممکن ہے اصول موضوعہ سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط مستقیم
کا بننا اور خارج ہونا اور دائرہ کا کہنچنا ممکن ہے

اگرچہ یہہ ناممکن ہے کہ موافق تعریف حدود کے کوئی خط مستقیم ٹہیک ٹہیک کسی سے کہنچ سکے یا دائرہ
صحیح صحیح بن سکے مگر اس سبب سے کہ بیان اونکا جسطرح تصور مین آجائی تصویر اونکی بنائی جاتی ہے

دوسرے اصل موضوعہ سی یہہ بات معلوم ہوتی ہے کہ ایک خط مستقیم دونو طرف یا دونون مین سے
ایک طرف کہنچ سکتا ہے

تیسرے اصل موضوعہ سی یہہ بات معلوم ہوتی ہے خط مستقیم معلوم المقدار اور معلوم المقام ہو تو
اوس کی ایک طرف کو مرکز تصور کرکے اوس خط کی برابر نصف قطر لیکر دائرہ کہنچ سکتا ہی جسطرح شکل
اول مین ہے سوا اسکے کہ کسی خط مستقیم کے ایک طرف مرکز ہو کوئی اور صورت دائرہ کہنچنے کی
اس اصل موضوعہ مین نہین بیان ہوئی

تیسرے اصل موضوعہ مین یہہ امر نہین بیان کیا گیا کہ کسی خط مستقیم کی برابر دوسرا خط مستقیم
اسطرح بنا لین کہ پرکار کے پرون کو پہیلا کر اوس خط کا طول ناپ کر دوسری جگہ اون پرون کو
رکہہ کر اور نقطون کا نشان کرکے خط کہنچ لین مگر دوسری شکل مین ایک خط مستقیم معلوم المقام
اور معلوم المقدار کے کہنچنے کی ترکیب بیان ہوئی ہے

علوم متعارفہ

بدیہی باتین ہین محتاج ثبوت کی نہین اور وہ ایسی ظاہر ہوتی ہین کہ کسی ثبوت سے زیادہ ظاہر نہین ہو سکتی
کیونکہ علوم متعارفہ علم ہندسہ کی وہ مبادی تصدیقیہ ہین جو بغیر اثبات کی مان لئے گئے ہین مشاہدہ
اور تجربہ سے ہمکو مختلف طرح کی مقادیر پر علم ہوتا ہی اور اسی بنا پر اونکے مساوی اور غیر مساوی
ہونیکا تصور پیدا ہوتا ہی حدود کی تصورات سی علوم متعارفہ کے تصدیقات کچہہ زیادہ مبرہن نہین
ہوتے یہہ علوم متعارفہ یعنی مبادی تصدیقیہ علم ہندسہ کے ایسی بدیہی ہین کہ اونسی زیادہ اور بدیہی نہین
ہو سکتی اور نہ اثبات کی محتاج ہین اور جو مبادی ایسی ہون کہ وہ ثابت ہوتی ہون وہ کسی برہان سے

بدیہیات مین داخل ہونے کے قابل نہین ہوسکتے اور جو حال انکا ہوتا ہے وہی کیفیت اونکے
عکس کی بہی ہوتی ہے

تجربے سے اول تصور یہہ پیدا ہوتا ہے کہ مقادیر ضرور کچہہ جگہ مین ہوتی ہین اور اس جگہ مین اور
مقادیر متواتر آسکتی ہین

مقادیر مین باہم تعلقات او نسبتین اضافی ہوتی ہین اور ان نسبتونمین مساوی اور غیر مساوی ہونیکے
تعلقات کا سمجہنا آسان ہی جب ہم مقادیر کا آپسمین مقابلہ کرتے ہین بعض مقادیر تو ایمین معلوم
ہوتی ہین اور مجہول مقادیر کو بمقابلہ مقادیر معلومہ کی دیکہتے ہین اور سلوب ترکیبی سے نتیجے مساوی
اور غیر مساوی ہونیکے نکالتے ہین اور سطرح ہمکو تصور مساوات مقادیر کا حاصل ہوتا ہے اور یہہ
آٹہوین علوم متعارفہ مین مساوات سطرح بیان ہوئی ہے کہ مقادیر جو ایکدوسرے پر منطبق ہوجائین یعنے
ایک ہی جگہ گہیرین وہ آپسمین برابر ہوتی ہین یہی علوم متعارفہ کی عمل تطبیق کی اصل ہے

جب دو خطوط مستقیم مین سے ایکو دوسرے پر چسپان کرین اور دو نقطے فین اونکی منطبق ہوجائین
تو وہ خطوط مستقیم برابر ہوتے ہین اگر دو سمتین دو خطون کی جو ایک زاویہ بناتی ہین دو اور خطوط
کی سمتون پر جو ایک زاویہ بناتی ہین منطبق ہوجائین اور زاویون کے راس بہی منطبق ہون تو
وہ زاویے آپسمین برابر ہوتے ہین طول خطون کا کسیطرح کا اثر زاویون کی مقدار پر نہین پیدا کرتا
اور جب ایک سطح مستوی دوسری سطح مستوی پر سطرح چسپان ہوجائے کہ حدود اونکی آپسمین منطبق ہوجائین
تو وہ سطحین آپسمین مساوی ہوتی ہین

مگر اسکا عکس ضرور نہین کہ صحیح ہی ہو

یعنے جب دو مقادیر آپسمین برابر ہون تو وہ منطبق ایکدوسرے پر ضرور ہوجائین اسلئے کہ دو مقادیر
رقبہ مین آپسمین برابر ہون جیسے دو سطحین متوازی الاضلاعین اور دو مثلث ۳۵ و ۳۷ شکل مین ہیں
لیکن اونکی حدود آپسمین برابر نہین ہین اور وجہ سے وہ شکلین ایکدوسرے پر ٹہیک ٹہیک منطبق
نہین ہونگی لیکن سب ایسی شکلین جنکے رقبے آپسمین برابر ہون اجزا ہو کر ایک دوسرے پر منطبق

ہو سکتی ہین مقادیر ہندسیہ یعنی مقادیر متصلہ جب ٹہیک ٹہیک ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتی ہین تو ہم کہتے ہین وہ آپسمین برابر ہین اور جب وہ مطلق اعداد مین تعداد احاد کی یکسان ہوتی ہی تو ہم کہتے وہ اعداد آپسمین برابر ہین اور مضاف عدد ونکو جب وہ نہین تعداد پیمانہ یار احاد ایک قسم کی جنس کے برابر ہون تو اونکو برابر کہتے ہین اسواسطی جو حساب مین اعداد کے مساوات سے مراد ہوتی ہی وہ علم ہندسہ مین نہین ہو سکتی اسلئے کہ کوئی پیمانہ واسطے خطوط مستقیم اور زاویہ اور سطح کیلئے نہین مقرر ہی شاید اقلیدس کا یہہ مطلب تہا کہ اول سات علوم متعارفہ ایسی مقرر کیجئے کہ وہ اعداد پر بہی اور مقادیر ہندسیہ پر بہی صادق آئین اسلئے پروقلس نے اونکا نام مفہومات مشترکہ رکہا ہے

علوم متعارفہ ۲ و ۳ و ۴ و ۵ مین بجائے ایک چیز کے برابر چیزین اگر مساوی یا غیر مساوی پر زیادہ کرو یا اونمین سے کم کرو تو باقی مساوی یا غیر مساوی رہینگے جیسے ۱۲ ش ا م مین ہے اور اگر ایک چیز مین سے مساوی اونکو کم کرین تو بہی باقی برابر رہینگے جیسے کہ ۲۵ ش ا م مین

علوم متعارفہ ۶ و ۷ سے معلوم ہوتا ہی کہ برابر چیزون کو دو چند اور نصف آپسمین برابر ہوتے ہین جیسا کہ (۱۲ ش ۳۴ م) مین اکثر علوم متعارفہ کی مثالین اسطرح بیان ہو سکتی ہین

علوم متعارفہ اول اگر ایک خط مستقیم اب برابر ایک خط مستقیم س د کے ہو اور خط مستقیم ی ف بہی برابر خط مستقیم س د کے ہو تو خط مستقیم اب برابر خط مستقیم ی ف کے ہو گا

علوم متعارفہ ۲ اگر خط مستقیم اب برابر خط مستقیم س د کے ہو اور خط ی ف برابر ہو ح ہ کے تو مجموعہ خطوط اب اور ی ف کا برابر ہو گا مجموعہ خطوط س د اور ح ہ کے

علوم متعارفہ ۳ اگر خط مستقیم اب برابر ہو خط مستقیم س د کے اور خط مستقیم ی ف برابر ہو خط مستقیم ح ہ کے تو حاصل تفریق اب اور ی ف کا برابر ہو گا حاصل تفریق س د اور ح ہ کے

علوم متعارفہ ۴ اوسکی دو صورتین ہین اور اونکی مثالین اسطرح ہین

اول اگر خط اب برابر خط ح ہ کے اور خط ی ف بہ نسبت ہ ح کی بڑا ہو تو مجموعہ خطوط اب اور ی ف کا بڑا ہو گا مجموعہ خطوط س د اور ح ہ سے

دوم اگر خط اب برابر ہو خط س د کے اور خط ی ف بہ نسبت ح ہ کے چھوٹا ہو تو مجموعہ خطوط اب اور ی ف کا بہ نسبت مجموعہ س د اور ح ہ کے کم ہوگا

علوم متعارفہ ۵ اسکی بھی دو صورتین ہین

اول اگر خط اب برابر خط س د کے ہو اور خط ی ف بہ نسبت ح ہ کے بڑا ہو تو فرق اب اور ی ف کا بڑا ہوگا بہ نسبت فرق س د اور ح ہ کے

دوم اگر خط اب برابر خط س د کے ہو اور خط ی ف بہ نسبت خط ح ہ کے کم ہو تو خطون اب اور ی ف کا فرق کم بہ نسبت خطون س د اور ح ہ کے فرق کے ہوگا

اس علوم متعارفہ کے یہہ مثال ہے کہ اگر مساویون مین سے غیر مساویونکو تفریق کرین تو باقی غیر مساوی رہینگے

علوم متعارفہ ۶ اگر خط اب دو چند خط س د سے ہو اور خط ی ف دو چند خط س د سے ہو تو خط اب برابر ہوگا خط ی ف کے

علوم متعارفہ ۷ اگر خط اب نصف س د کا ہو اور خط ی ف بھی نصف س د کا ہو تو خط اب برابر ہوگا خط ی ف کے

یہہ بھی ظاہر ہے کہ اگر غیر مساوی مقدارون مین سے مساوی مقدارین تفریق کرین تو بڑا فرق چھوٹے فرق سے اوسقدر زائد ہوگا جسقدر کہ اول غیر مساوی مقدار دونین سے بڑی مقدار چھوٹی مقدار سے بڑی ہو

اگر غیر مساوی مقدارون مین غیر مساوی مقدارین تفریق کرین تو کچھہ ضرور نہین کہ فرق غیر مساوی ہی حاصل ہون وہ مساوی بھی حاصل ہو سکتی ہین اور ایسی ہی اگر غیر مساوی مقدار دنیر غیر مساوی مقدارین زیادہ کرین تو کچھہ ضرور نہین کہ مجموعے جو حاصل ہون وہ غیر مساوی ہی ہون وہ مساوی بھی ہوسکتے ہین علوم متعارفہ ۹ کل بڑا اپنے جز سے ہوتا ہی اور اسکا عکس یعنی جز چھوٹا اپنے کل سے ہوتا ہے یہہ آٹھوین علوم متعارفہ کی نقیض ہے

علوم متعارفہ ۱۰ اسمین ایک خاصیت خطوط مستقیم کی بیان کی گئی ہے یعنی دو خط مستقیم سطح کو نہین گھیر سکتے

اسکا وہی مطلب ہے جو خطوط مستقیم کے حدود مین بیان کیا گیا ہی سو اسطی کہ اگر وہ سطح کو گھیرتے ہون
تو اپنے نقاط اطراف پر حالت مساوات مین منطبق نہین ہوتے
علوم متعارفہ ۱۱ یہہ علوم متعارفہ نہین ہی بلکہ ایک شکل ثبانی ہی اور اسکا عکس ہمیشہ صحیح نہین ہوتا یعنے
یہہ ضرور نہین کہ جو زاوئے آپسمین برابر ہون وہ قائمے ہی ہون
پروفاسر نے اس اصول موضوعہ کو ثابت کیا ہے اوسکو ترمیم کرکے نیچے لکھتے ہین +
فرض کرو کہ ا د ب اور ا ر ب دو قائمے ہین
تو ہم دعوے کرتے ہین کہ وہ آپسمین برابر ہین
اسواسطی کہ اگر وہ برابر نہون تو زاویہ ا ر ب کو
زاویہ ا د ب پر اسطرح چسپان کرو کہ نقطہ د
نقطہ ر پر ہو اور خط د ا ر ا منطبق ہو خط ا ر پر ہو تو د ب اور ر ب ایک ہی جگہ مین واقع
ہون گے اسلئے اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو ر ب　ر ب پر نہین واقع ہوتا ہے
بلکہ وہ ر ب کے مقام پر واقع ہوتا ہے خطوط ا ر ب اور ر ب کو س و س تک بڑھاؤ
چونکہ ب ر ا قائمہ ہے اور بحکم (۱۰ احد) کے ا ر س کی برابر ہے اور ب ر ا قائمہ ہے
اور بحکم (۱۰ احد) کے برابر ا ر س کے ہے اور یہہ بڑا ا ر س سے ہے لیکن ب ر ا برابر ہے
ا ر س کے اسواسطے دو مساوی مقدار و نمین سے ایک مقدار کا جزو برابر ہوا اوس جزو کے
جسکی دوسری مقدار ایک جزو ہی اور یہہ ناممکن ہی سو اسطی خط ر ب منطبق ر ب پر ہوتا ہے
اور اسی وجہ سے زاویہ قائمہ ا د ب برابر زاویہ قائمہ ا ر ب کے ہوتا ہے
علوم متعارفہ ۱۲ اگر اسکے آخر مین یہہ الفاظ اور زیادہ کیا جائے کہ وہ مثلث بناوین گے تو یہہ
بالکل عکس ستر ہوین شکل مقالہ اول کا ہو جائے

قضیہ ہندسیہ کی شکلین

قضیہ منطقیون کی اصطلاح مین وہ قول ہی جسمین سچ اور جھوٹ کا احتمال ہو سچ وہ ہے جو واقع مین بھی ہو مثلاً کہین مثلث کی دو ضلعے ملکر تیسرے ضلعے سے بڑے ہوتے ہین تو یہہ امر واقع کی مطابق ہے اور اگر یہہ کہین کہ مثلث کی تینون زاوئے ملکر برابر چار قائمون کی ہوتے ہین تو یہہ مطابق واقع کی نہین اسلئے جھوٹ ہی غرض یہہ دونو قضئے ہندسیہ ہین اب اوسکی دو قسمین ہین ایک حملیہ دوسرا شرطیہ ۔

حملیہ وہ قضیہ ہی جسمین ایک چیز کے ثبوت یا نفی کا حکم دوسری شئے کی لیئے کیا جائے جسمین ثبوت کا حکم ہو وہ موجبہ کہلاتا ہی اور جسمین نفی کا حکم ہو وہ سالبہ کہلاتا ہے جو تھی شکل قضیہ حملیہ موجبہ ہے اوسمین ایک خاصیت کا اثبات ہی اور شکل ساتوین قضیہ حملیہ سالبہ ہے اسلئے کہ اوسمین ایک خاصیت کی نفی ہے اور شرطیہ وہ قضیہ ہے کہ جسمین اتصال یا انفصال کا حکم کیا جائے اتصال کہتے ہین ایک نسبت کے پائے جانے کو دوسری نسبت کے پائی جانیکی تقدیر پر جیسے ۱۹ شکل مین اگر یہہ زاویہ مثلث کا بڑا ہی تو اوسکے سامنے کا ضلع بڑا ہی اور انفصال کہتے ہین دو نسبتون مین سے ایک نسبت کے پائے جانے کو اون دو نسبتون سے کوئی ایک نسبت پائی جائے خواہ یہہ ہو خواہ وہ مگر دونو ساتھہ نہ پائی جائین مثلاً کہین کہ یہہ خط مستقیم اوس خط مستقیم کے برابر ہے یا چھوٹا یا بڑا ہے اب ان دو نسبتون مین سے ایک ہی نسبت پائی جائیگی +

قضیہ حملیہ مین محکوم علیہ کو موضوع اور محکوم بہ کو محمول کہتے ہین اور نسبت پر جو دلالت کرے اوسے رابطہ کہتے ہین مثلاً یہہ خط مستقیم ہی خط جسپر حکم کیا گیا ہی محکوم علیہ یعنی موضوع ہے اور مستقیم کہ جسکا حکم خط پر کیا گیا ہے محمول ہے اور ہی جسسے نسبت مستقیم ہونیکی خط کیطرف سمجھہ مین آتی ہی رابطہ ہے شرطیہ مین پہلی خبر کو مقدم کہتے ہین اور دوسرے کو تالی اگر زاوئے متبادلہ آپسمین برابر ہون تو خطوط متوازی ہوتے ہین اس شرطیہ مین زاوئے متبادلہ آپسمین برابر ہون مقدم ہے اور خطوط متوازی ہوتے ہین تالی ہے پھر اس حملیہ کی کئی قسمین ہین اگر حملیہ موجبہ ہو اور موضوع کے کل افراد پر حکم کیا جاوے تو اوسے موجبہ کلیہ کہتے ہین اور اگر بعض اجزا پر ہو تو جزیہ ۔

حملیہ سالبہ ہو اور اوس موضوع کے سب فردون پر حکم ہو تو اوسے سالبہ کلیہ کہتے ہین اور بعض

جزو پر ہو تو سالبہ جزئیہ پس چار قسمین ہوئین موجبہ کلیہ موجبہ جزئیہ سالبہ کلیہ سالبہ جزئیہ

مثالین

موجبہ کلیہ	سب مثلث تین ضلعے رکہتے ہین
موجبہ جزئیہ	بعض مثلث قائم الزاویہ ہوتے ہین
سالبہ کلیہ	کوئی مثلث چار ضلعون کا نہین ہوتا
سالبہ جزئیہ	بعض مثلث منفرج الزاویہ نہین ہوتے

توجیہ

حملیہ مین نسبت کی کیفیت بہی بیان کیجائے تو اوسے توجیہ کہتے ہین اور جسمین اوس کیفیت کا بیان کیا جائے اوسے جہت یا وجہ کہتے ہین مثلاً ضرور سب مثلث تین زاوے رکہتے ہین تین زاوئے ہونیکی جو نسبت مثلث کی طرف ہے اور اوس نسبت کی کیفیت بہی بیان کی گئی ہے کہ یہہ نسبت ضروری ہے تین زاویونکا مثلث کی ذات سے جدا ہونا محال ہے توجیہ کہلاتی ہے

قضیہ شرطیہ کی بہی چار قسمین ہین

۱ - تالی کی نسبت مقدم کی نسبت کی کل تقدیر پر پائی جائے تو وہ شرطیہ کلیہ کہلاتا ہے

۲ - تالی کی نسبت مقدم کی نسبت کے بعض تقدیر غیر معین پر پائی جائے تو وہ شرطیہ جزئیہ کہلاتا ہے

۳ - تالی کی نسبت مقدم کی نسبت کی معین اور خاص تقدیر پر پائی جائے تو وہ شرطیہ شخصیہ کہلاتا ہے

۴ - تقدیر کی کلیت اور بعضیت کا ذکر چہوڑ دیا جائے تو وہ مہملہ ہے

اگر تمام اقلیدس کے مسائل کو دیکہین تو وہ سارا اسی قسم کے قضیونسے بہرے پڑے ہین اور اوسمین نتیجے اوسیطرح نکلتے ہین جسطرح اشکال منطقی مین نکلتے ہین اوسکی تفصیل بیان کرتے ہین ہم پہلے بیان کر آئے ہین کہ قیاس ایک قول ہے جو کئی قضیونسے ملکر بنتا ہے اور اوسکے مان لینے سے دوسرے ایک قول کا ماننا ضرور ہوتا ہے اسکو نتیجہ کہتے ہین

قیاس دو طرح کا ہوتا ہے ایک حملی دوسرا شرطی

حملی وہ ہے جو صرف حملیات سے مرکب ہوا ہو جیسے سب مثلث شکل ہیں ور سب شکلیں محدود ہیں تو مثلث محدود ہیں۔

شرطی وہ ہے جو صرف شرطیات سے بنا ہو جیسے جب یک خط مستقیم پر ایک خط مستقیم قائم ہوتا ہے تو دو زاویے قائمے پیدا ہوتے ہیں ؛

یا شرطیہ اور حملیہ دونوں سے ترکیب پاتا ہے۔

قیاس حملی ہیں مطلوب ور دعوی کے موضوع کو اصغر کہتے ہیں اور محمول کو اکبر ایک ہی حد جو اصغر اکبر دونوں کے ساتھ ملتی ہے اور اُس سے دو قضیے بنجاتے ہیں اُسے حد اوسط کہتے ہیں + اصغر جس قضیہ میں ہوتا ہے اُسے صغری اور اکبر جسمیں ہوتا ہے اُسے کبری پس حد اوسط یا صغری میں محمول ہوگی اور کبری میں موضوع تو شکل اوّل پیدا ہوگی یا حد اوسط صغری اور کبری دونوں میں محمول ہوگی یہ شکل ثانی ہے یا صغری اور کبری دونوں میں موضوع ہوگی یہ شکل ثالث ہوگی یا صغری میں موضوع اور کبری میں محمول ہوگی یہ شکل رابع ہے یہی شکلیں منطق کی علم ہندسیہ میں بھی کام میں آتی ہیں مگر منطق کیطرح اُسمیں صغری اور کبری بنا کے نتیجے نہیں نکالتے بلکہ اُن دونوں میں ایک قضیہ کا ذکر نہیں کرتے مگر سمجھنے والا اُس قضیہ کو لگا لیتا ہے جسطرح کہ روزمرہ کی گفتگو کا حال ہے مثلاً پہلی شکل مقالہ اول میں چونکہ نقطہ آ مرکز دائرہ ب ج د کا ہے اسواسطے خط مستقیم آ ب برابر ہے خط مستقیم آ ج کے اب اسمیں یہ قضیہ نہیں بیان کیا گیا کہ تمام خطوط مستقیم جو دائرہ کے مرکز سے محیط تک کھیچے جاتے ہیں آپسمیں برابر ہوتے ہیں منطق اور علم ہندسیہ کے براہین میں یہی فرق ہوتا ہے کہ منطق میں شکلیں بنا بنا کر اور صغری اور کبری کو قائم کرکے نتیجہ نکالتے ہیں اور ہندسیہ میں کبھی صغری کو مقدر کرتے ہیں کبھی کبری کو غرض ایک طرف یا دونوں طرفین محذوف ہوتی ہیں ؛

ایک اور مثال اس قسم کی شکل اول مین موجود ہے کہ

کبریٰ چونکہ خط مستقیم اب برابر ہے خط مستقیم اس کے

صغریٰ خط مستقیم ب س برابر ہے اب کے

نتیجہ اسواسطے خط مستقیم ب س برابر ہے خط مستقیم اس کے

صغریٰ مین ب س موضوع اور اب محمول ہے

اور کبریٰ مین اب موضوع اور اس محمول ہے

اس اکبر اور ب س اصغر اور اب حد اوسط اس شکل مین ہے

اس شکل مین خط مستقیم کے حدود اور دو خطوط مستقیم کی مساوات ہندسہ کے طور پر

اور علوم متعارفہ کو مان لیا ہے جب نتیجہ نکلا ہے

یہ ناممکن ہے کہ خط مستقیم موافق حدود کے کہیج سکے یعنے جسکا نرا طول ہو اور عرض

نہو یا نقطہ بن سکے جسکا نہ طول ہو نہ عرض لیکن اس سبب سے کچھہ براہین ہندسیہ مین

خلل نہین عائد ہوتا کیونکہ جو نتیجے نکالے جاتے ہین وہ موافق اُنہین حدود کے

ہوتے ہین کہ نقطہ وہ ہے جسکے جز نہو سکین مگر مقام ہو اور خط وہ ہے جسکا طول

ہو عرض نہو اور سطح وہ ہے جسکا طول اور عرض دونون ہون مگر عمق نہو

نتیجہ نکالنے مین سوائے ان باتون کے کوئی اور نئی بات اُنمین نہین لگائی جاتی

صحت نتیجہ کی صغریٰ اور کبریٰ کی صحت پر موقوف ہے اگر شکل مین صغریٰ اور کبریٰ صحیح ہین

تو نتیجہ کے صحیح ہونے مین کچھہ شک و شبہ نہین ہے اگر صغریٰ یا کبریٰ دو نو یا ایک اُنمین

سے غلط ہو تو نتیجہ غلط نکلے گا اس حالت مین اگر یہ کہتے ہین کہ نتیجہ صغریٰ کبریٰ سے

نکلا مگر حقیقت مین وہ نتیجہ خود اُن صغریٰ اور کبریٰ مین شامل ہوتا ہے غرض

جبتک صغریٰ اور کبریٰ اچھی طرح سمجھہ مین نہ آئین تو اُنکا نتیجہ بھی سمجھہ مین نہ آئے گا۔

۔تسلسل دلائل کا جس سے کہ مطلوب پر استدلال کرتے ہین برہان ہندسیہ یا اثبات ہندسیہ

کہلاتا ہے اور برہان دو طرح کے ہوتے ہین ایک تو یہ عین نتیجہ کو ثابت کرین۔
دوسری صورت یہ ہے کہ کہین نتیجہ اگر ثابت نہین ہوتا تو البتہ نقیض نتیجہ ثابت ہوگا
کیونکہ ارتفاع نقیضین محال ہے اور یہہ نقیض موجبہ ہوگا پس اسے ہم صغری بنائینگے
اور اصل کبری کو کبری اس ترتیب سے شکل بناکر نتیجہ نکالینگے جو اصل صغری کے منافی ہوگا
اور ظاہر ہے کہ اجتماع متنافیین بہی محال تو اِس سے صاف معلوم ہوا کہ نقیض نتیجہ کا ثبوت
مُحال ہے پس نقیض نتیجہ کا ثبوت محال ہے تو عین نتیجہ کا ثبوت ضرور ہے اور یہی مطلوب
تھا اسکو ثبوت بہ خلف کہتے ہین۔
اقلیدس کے اصول علم ہندسہ مین دو قسم کی شکلین ہوتی ہین ہر شکل مین کچہہ معلومات ہوتی ہین
اُن معلومات سے ایک مجہول جو اُن معلومات سے کچہہ علاقہ رکھتا ہے دریافت کرتے ہین
پس اگر ان معلومات سے کسی مجہول کے دریافت کرتے ہین حکم عمل کا ہے تو اُسکو شکل
عملی کہین گے اور اگر حکم اثبات کا ہے تو شکل اثباتی۔ شکل اثباتی مین قیاس حملی ہوتا ہے
اور شکل عملی مین کچہہ معلومات اور حکم عملی اور اُنکی قسمین وہی چار چار طرح کے ہین
جو ہم اول لکہہ آئے ہین۔
پاسکل صاحب لکہتے ہین کہ یہ فقط براہین ہندسیہ ہی ہین جنکے یقینی ہونے پر اتفاق ساری
دنیا کا ہے جو بات اُس سے صحیح ثابت ہوئی وہ سبکے نزدیک بہی صحیح ہے اور جو غلط ثابت ہوئی
وہ سب کے نزدیک غلط ہے اسکا سبب ہے کہ مہندس برہان ہندسیہ اُن اصول پر
قائم کرتا ہے جو صحیح قاعدے اثبات کے ہین اور وہ تعداد مین آٹہہ ہین ؛
اول ہر شے کی تعریف کچہہ ہو سکتی ہے مگر مہندس کسی چیز کی تعریف نہین کرتے جبتک اُنکو
ایسے الفاظ با معنی نہ ہاتہہ آئین کہ جنسے وہ زیادہ سمجہہ مین آئین ؛
دوم کوئی لفظ مبہم ایسا نہین لاتے کہ جسکے معنی خوب توضیح کے ساتہہ نہین بیان کرتے
سوم حدود مین وہ الفاظ نہین استعمال کرتے جنکے معنی معلوم نہون ؛

چہارم جو صورتیں استدلال کرتے ہیں ان میں کسی بات کو نہیں چھوڑ جاتے جب تک کہ استلزامی ہو تا تحقیق
پنجم مبادی تصدیقیہ جب تک عملی بدیہی نہیں ہوتے علوم متعارفہ میں انکو داخل نہیں کرتے
ششم کسی ایسی چیز کو نہیں ثابت کرتے جو ایسی صاف ہو کہ بعد اثبات کے بھی ویسی صاف رہے
ہفتم ہر بات کو بدیہیات سے اور اون مسائل سے جو پہلے ثابت ہو چکے ہیں ثابت کرتے ہیں
ہشتم جن اشیاء کے حدود بیان کی گئی ہیں اونکی ذات سے تو قطع کرتے ہیں اور
انکی حدود کو ذہن میں رکھتے ہیں +

پہلا اور چوتھا اور چھٹا قاعدہ براہین قائم کرنے کے لیے اور غلط نتایج سے محفوظ رہنے
کے لئے ایسے ضروری نہیں ہیں جیسے کہ باقی پانچ اور قاعدے ہیں یہہ سارے قواعد
منطق کے سب کتابو نمیں ہوتے ہیں مگر اونکا استعمال مہندسین جس خوبی و لطف کے ساتھ
کرتے ہیں اوس طرح منطقین نہیں کام میں لاتے اصول علم ہندسہ اقلیدس میں براہین
ہندسیہ ایسے مربوط اور مضبوط ہوتے ہیں اور اونکے بیان کرنیکا ایسا طریق ہے کہ ادسر قدم بقدم
چلتے ہیں اور ہر قدم پر فہم کو کام میں لاتے ہیں مجہول اور منتشر بیانات سے نتایج
نہیں نکالتے اور جن مبادی کا بالتصریح بیان ہو چکا ہے اونہیں کا حکم لگاتے ہیں +

بعض حکما کی تو رائے یہہ ہے کہ صرف حدود و بعض خواص ایسے بتلاتے ہیں کہ جنپر تمام براہین
ہندسیہ کلیہ کا مدار ہے اور تمام علم ہندسہ اون حدود سے ہی مستنبط ہوتا ہے اور اون حدود ہی پر
موقوف ہے - اور بعض کی رائے یہہ ہے کہ حدود تو صرف الفاظ اور اصطلاحات مستعملہ کے
معنی ہیں اونکو خواص اور ذاتیات اشیاء سے کیا تعلق ہے - اگر حدود یعنی مبادی تصوریہ
میں ہم اصول موضوعہ یعنی مبادی تصدیقیہ مسلمہ اور علوم متعارفہ یعنی مبادی تصدیقیہ بدیہیہ کو بھی
شامل کرلیں تو ہمیں شک نہیں کہ تمام براہین ہندسیہ حدود ہی پر مبنی ہونگے اور سارا
انحصار انکا اونہیں پر ہوگا - لیکن اگر حدود کو فقط یہہ سمجھیں کہ وہ معنی الفاظ مستعملہ کے
اور انمیں تعریف اشیاء کی اسطرح بیان کی گئی ہے کہ اوسکی تفہیم اور تفہم میں کوئی شبہہ نہ واقع ہو

تو پہر اثبات کا مدار صرف حدود پر نہین رہے گا بلکہ اُسکے لئے اور مبادی تصدیقیہ کی ضرورت پڑیگی اور یہ مبادی تصدیقیہ اصول موضوعہ اور علوم متعارفہ ہونگے - اصول موضوعہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ بعض اشیا کا بنانا ممکن ہے اور وہ تجربات سے ثابت ہین اور علوم متعارفہ وہ مبادی تصدیقیہ ہین کہ ایسے بدیہی اور ظاہر ہین کہ محتاج اثبات نہین لیکن اُنکو مبادی مسلمہ براہین ہندسیہ کے لئے مان لیا ہے بس اس سے معلوم ہوا کہ حدود اور اصول موضوعہ اور علوم متعارفہ تینون پر براہین ہندسیہ موقوف ہین ؀

پہلے بیان کر آئے ہین کہ شکل کیا عملی ہوگی یا اثباتی اُسکو آسانی سے سمجھنے کے لئے چھہ حصون مین تقسیم کر لیتے ہین اور اُن حصونکی تفصیل پروقلس سطرح اپنے شرح مقالہ اول اقلیدس مین لکھتا ہے کہ

اوّل دعوی شکل جسمین شرائط شکل کی خواہ اثباتی ہو یا عملی بیان ہوتے ہین ؀

دوم بیان دعوی ایک خاص شکل کہینچکے اُسپر شرائط دعوی کو بیان کرکے عیان کرنا ؀

سوم جب شکل بنجائے تو اُس مین اپنے اصلی مطلوب کو مقصود کو بیان کرنا کہ ہم یہہ چاہتے ہین اور اُسی پر ساری توجہ کرتے ہین ؀

چہارم اثبات دعوی کے لئے شکل کو موافق اصول موضوعہ کے کامل کرنا -

پنجم اثبات دعوی اسمین ایک تسلسل اشکال منطقیہ کا ہوتا ہے اور اُس سے نتیجے نکالتے ہین جس سے معلوم ہوتا ہے کہ دعوی ہمارا صحیح تہا یا غلط تہا یا جو مطلوب ہمارا تہا اُسکا حاصل ہونا ممکن ہے یا ناممکن -

ششم نتیجہ آخر اسمین دعوی کو بیان کرکے کہتے ہین کہ جو قیاس حملی اسمین بیان ہوا تہا اُس شکل محمول ثابت ہوا یعنے مطلب ہمارا حاصل ہوا یا ثابت ہوا -

اِسوقت ہمکو ایک بڑی دقت دو انگریزی لفظونکے ترجمہ کرنیمین پڑی ہے اُنکا ترجمہ محاورہ کے موافق شکل ہر جگہہ کرنا پڑا ہے حالانکہ معنی اُنکے مختلف ہین ایک تو شکل کے معنی شبیہ کے ہین جس مین خط وغیرہ کہینچے ہوئے ہون دوسری شکل کے معنی اوس

بیان کے لئے ہین جمین اوپر کے چھوٹی باتین مذکور ہوتے ہین بعض جگہ اس ایک ہی لفظ
کے استعمال سے طلبہ کو شبہ پڑیگا کہ کونسے معنی لگائین اگر مین دو لفظ جدا جدا ترجمہ مین
تجویز کرتا تو مجھپر بے محاورہ لکھنے کا الزام لگتا - میرے نزدیک یہہ مناسب تہا کہ پہلے معنی جہان مراد
ہوتی وہان شکل کی جگہ شبیہ لکھتا لیکن شکل کے دونو معنی ایسے مانوس الاستعمال ہین
کہ میری نئی گھڑنت کو کوئی نہین پوچھتا

شکل ۱ - مقالہ اول اور دوم مین جسطرح خط مستقیم ایک آلہ عملی شکلونکے بنانیکے لیے ہے اسیطرح
دائرہ ہے اور اوسکا عمل بالکل تیسرے اصول موضوعہ پر موقوف ہے کوئی اور خاصیت دائرہ کی سوا
اوسکے جو حد دو دائرہ اور تیسرے اصول موضوعہ مین بیان ہوئے ان دو مقالونکے اندر کام مین
نہین آئے جب دو دائرے اسطرح سے کھینچے جائین کہ ایک کا مرکز دوسرے کے محیط مین ہو تو ضرور
ایک دائرہ کا کچھہ حصہ دوسرے دائرہ کے اندر ہوگا اور کچھہ باہر اسواسطے اونکے محیط ضرور
دو نقطونپر قطع کرین گے اور انمین ایک ایک ہر سمت مین خط مستقیم معلوم کے ہوگا تو سوا اسکے
دو مثلث متساوی الاضلاع ایک خط پر بنی گی -

شکل ۲ - اس شکل مین جب نقطہ معلوم نہ تو اوس خط مستقیم معلوم مین ہو نہ اوس خط ممدودہ مین تو
اوسکی اٹھہ اختلاف شکل پیدا ہونگے اور آٹھہ خط مختلف سمتونمین کھینچے جاوینگے تفصیل اوسکی یہہ ہے

اول - خط معلوم کی دو طرفین ہین جنمین سے ہر ایک مین اور نقطہ معلوم مین خط ملایا جا سکتا ہے

دوم اس ملائے ہوئی خط کی دو سمتونمین دو مثلث متساوی الاضلاع بن سکتے ہین

سوم لمثلث متساوی الاضلاع ا ب د کا ضلع ب د ہر ایک طرفسے کھنچ سکتا ہے -

لیکن اوس خط مستقیم معلوم مین یا اوس خط معلوم ممدودہ مین جب نقطہ معلوم واقع ہو تو
وہ دو اختلاف جو خط کے ہر ایک طرف اور نقطہ معلوم مین ملانے سے پیدا ہوتی تہی
معدوم ہو جائینگے اور اس صورت مین صرف چار اختلاف باقی رہینگے +

ب کو مرکز اور ب س کو نصف قطر مقرر کرکے اول دائرہ س ح ہ کھینچین اور مثلث متساوی الاضلاع

د ب ا کے ضلع د ب کو کھینچکر محیط سے نقطہ ح پر ملائین اور پھر مرکز د اور نصف قطر د ح پر دائرہ ح ک ل کھینچین اور د ا کو خارج کر کے محیط سے نقطہ ل پر ملائین تو شکل بنانے کی ترکیب نہایت صاف اور سہل ہو جائیگی

اور اسی ترکیب سے ایک چھوٹا خط اتنا خارج ہو کر بڑھ سکتا ہے کہ وہ برابر بڑے خط کی ہو جائے

شکل ۳ دعوی مین تصریح اس امر کی نہین ہے کہ خط کس طرف سے خط قطع کیا جائے اسلئے اوسکی اثبات کی دو صورتین ہو سکتی ہین - اس شکل کی استعانت سے دو خطوط مستقیم کے مجموعہ اور فرق کے برابر ایک خط مستقیم دریافت ہو سکتا ہے

شکل ۴ اس شکل مین اول ہی اول مساوات دو مثلثون کی بیان ہوئی ہے اور دو اور صورتین مساوات مثلثون کی ۸ اور ۲۶ شکلون مین بیان ہوئی ہین

ہر عمارت مین بنیاد اور بلندی ہوتی ہے بنیاد کو قاعدہ اور بلندی کو ارتفاع کہتے ہین یہی دونو لفظ علم ہندسہ مین بھی مستعمل ہین اور یہی معنی اونکے اصلی معنی کی مناسبت سے لئے جاتے ہین مگر اتنا فرق ہے کہ قاعدہ عمارت مین ہمیشہ نیچے ہوتا ہے لیکن علم ہندسہ مین یہہ ضرور نہین -

چھبیسوین شکل کی صورت اول ہی اس شکل کی طرح ثابت ہو سکتی ہے -

شکل ۵ - پروفلس نے فوق القاعدہ کے زاویون کی مساوات بغیر اخراج ساقین کے اسطرح ثابت کی کہ مثلث متساوی الساقین ا ب س کی کسی ساق ا ب مین نقطہ د متعین کر کے باقی بدستور ترکیب عمل مین لایا

یہہ شکل انطباق سے بآسانی اور طرح بھی ثابت کی ہے فرض کرو کہ مثلث ا ب س کو مثلث ا س ب پر اسطرح چسپان کرین کہ ا ب منطبق ا س پر اور ا س منطبق ا ب پر ہو تو مثل چوتھی شکل کے زاویہ ا ب س برابر زاویہ ا ب س کے ہوگا - اگر ایک خط زاویہ ا س کی تنصیف کرنیوالا فرض کرین تو دعوی بہت آسانی سے چوتھی شکل سے ثابت ہے

یہہ محاورہ کہ ف س ملاؤ مختصر اس عبارت کا ہے کہ نقطہ ف سے ایک خط مستقیم س تک کھینچو اس شکل کے اثبات سے ایک نتیجہ ثابت ہوتا ہے وہ لکھدیا گیا ہے - مامون رشید کو یہہ شکل ایسی پسند تھی

کہ اپنے ہر لباس پر وہ اس شکل کو بنواتا اسلیئے اس شکل کا نام مامونی ہوگیا

شکل ۶ - (ہش ہ ش) کے ایک حصہ کا عکس ہے یہان عکس کا ذکر آیا اسلیئے ہم اوسکو مفصل بیان کرتے ہین
عکس سے کہتے ہین کہ قضیہ ہندسیہ کے دونو طرفون سے ایک کو دوسرے کی جگہ کہین یعنے موضوع اور
مقدم کو محمول اور تالی کی جگہ کہین اور محمول اور تالی کو موضوع اور مقدم کی جگہ اور صدق اور
ایجاب اور سلب جسکا ن کا تون رہنے دین تو اسے عکس کہتے ہین مثلاً شکل پنجم مین مقدم مساوات
اضلاع ہے اور تالی مساوات زاویون کی تھی اب مقدم کو تالی کی جگہ اور تالی کی جگہ مقدم کو رکہا تو
مساوات زاویون کی مقدم اور مساوات اضلاع کی تالی ہوئی
ایک عکس کی اور قسم ہے کہ قیاس ہندسہ مین قضیے کئے ہون اور سب کا محمول ایک ہو اب ان متعدد
قضیون مین فقط ایک قضیہ کو محمول کے ساتھ ملا کر عمل عکس کرین اسطرح کا عکس شکل ۸ و ۱۹ مین پایا جاتا ہے یہہ بہی بیان کرنا ضرور ہے کہ کچھ ضرور نہین کہ اگر ایک مسئلہ ہندسیہ کلیتاً صحیح ہو تو اوسکا
عکس بہی صحیح ہو مثلاً اگر دو مثلثون کے تینون ضلعے متناظرہ آپسمین برابر ہون تو اونکے تینون زاویے
متناظرہ بہی برابر ہونگے مگر عکس اسکا صحیح نہین کہ اگر دو مثلثون کے تین زاویے متناظرہ آپسمین برابر
ہون تو ضرور نہین ہے کہ اونکے ضلعے بہی آپسمین برابر ہون بعض صورتون مین مسائل ہندسیہ مین اون
شرطونکا ہونا ضروری نہین ہوتا جنکا اونکے ذہن مین ہونا ضرور ہوتا ہے یہان نقیض اور عکس مین
فرق ہمیشہ طالب علم کو سمجہنا چاہیئے تناقض اون قضیون کے اختلاف کو کہتے ہین کہ ایک قضیہ کے صادق
ہونیسے دوسرے قضیہ کا کاذب ہونا ضرور ہو اور اسیطرح ایک کے کاذب ہونے سے دوسرے کا صادق
ہونا بہی ضروری ہو مبتدیون کی یہہ بڑی غلطی ہے کہ وہ قضیہ سالبہ کلیہ کے صحیح ہونیسے قضیہ موجبہ
کلیہ کو صحیح جانین بلکہ صحیح اصول یہہ ہے کہ قضیہ موجبہ کلیہ جب صحیح ہو تو اوسکے نقیض قضیہ سالبہ کلیہ
کو غلط جانین

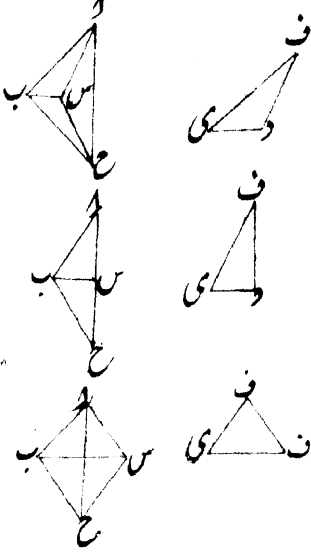
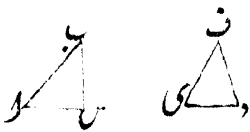
شکل ششم - ایک مثال ثبوت بہ خلف کی ہے اسکا حال ہم پہلے بیان کر آئے ہین اسقدر یہان بیان کرنا
اور ضرور ہے کہ اگر شکلین جو عکس اپنی ماقبل کے شکلونکے ہین اونکا ثبوت بہ خلف اکثر آتا ہے جب نتیجہ کو

ثابت نہین مانتے تو نقیض نتیجہ کو صحیح مانتے ہین اور اوسے آخر کو نتیجہ باطل نکلتا ہی اسی معلوم ہوتا ہی
طرفین شکل مین سے کوئی غلط تہی جو نتیجہ غلط نکلا ناممکن ہے کہ صغری اور کبری صحیح ہون اور اون
سے نتیجہ باطل نکلے جہان ہم یہہ لکہتے ہین کہ یہہ باطل ہے تو اوسی یہہ سمجہنا چاہئے کہ کوئی نتیجہ بمعنی منافی
صغری کے نکلا ہے یعنی خلاف اوس فرض کے جو دعوی مین مانا ہی نتیجہ نکلا ہی چہٹی شکل کی ضرورت
دوسرے مقالہ کی چوتہی شکل تک نہین پڑتی اسلئے اگر اوسکو کہین اور اوٹہاکر رکہدین تو کچہہ خرابی
نہین عائد ہوگی مثلاً اٹہارہوین شکل کے بعد ہم نے اوسے رکہا تو وہ اسطرح ثابت ہوگی
کہ فرض کرو اب س مثلث ہی جسکا زاویہ اب س برابر ہے زاویہ اس ب کے تو ضلع اب برابر ہوگا
ضلع اس کے ہو اسطرح کہ اگر وہ برابر نہو تو اونمین سے ایک بڑا ہوگا فرضکرو کہ اب بڑا ہے تو بحکم
(۱۸ ش ام) کے زاویہ اس ب بڑا زاویہ اب س سے ہوا اور یہہ باطل ہے اسلئے مساوات ضلاع
ثابت ہی اور اگر ۲۶ ش ام کی بعد لکہین تو زاویہ ب اس کے خط مستقیم سے جو قاعدہ سے
نقطہ د پر ملے تنصیف کرو تو بحکم (۲۶ ش ام) مثلثات اب د اور اس د سطرح آپسمین
برابر ہونگے۔ یہہ شکل بہی شکل ۵ سے انطباق سے ثابت ہو سکتی ہے

شکل ۷ - اصل دعوی اقلیدس کا یہہ ہے کہ اگر دو خطوط ایک خط مستقیم کے ہر ایک طرف پر ملین تو ممکن نہین کہ اونمین سے وہ جو ایکطرف پر منتہی ہین آپسمین برابر ہون بہ نسبت اوسکو بدلکر اسطرح لکہدیا ہے

شکل ۸ - جب تین ضلعے ایک مثلث کے دوسرے مثلث کے تینون ضلعون پر منطبق ہون تو کل مثلث
کل مثلث پر منطبق ہوجاویگا اور دونون مثلث رقبہ مین برابر ہوجائینگے لیکن اقلیدس نے
مساوات مثلثون کے رقبون کے سوا شکل چہارم کے کہین اور نہین لکہی

آٹہوین شکل دلیل خلف سی بالکل ہی اسطرح ہوسکتی ہے کہ فرضکرو اب س اور دی ف دونون
مثلث اسطرح چسپان کئی جائین کہ قاعدہ ب س پر قاعدہ دی منطبق ہوجائے اور ب س کے
مقابل سمتون مین راس آ اور ح واقع ہون ملاؤ آح چونکہ اس ح مثلث متساوی الساقین ہے
اسلئے بحکم (۵ ش ام) کے زاویہ س آح اور س ح آ آپسمین برابر ہین اور اسیطرح زاویہ

ب ا ح اور ب ح ا آپسمین برابر مین پس کل زاویہ ب ا س برابر ہوا کل زاویہ ب ح س یعنے
ی ف د کے

اسکے تین اختلاف ہوسکتے ہین کہ ا ح قاعدہ کو قطع کرے
دوم باہر قاعدہ سے ا ح واقع ہو اس صورت
مین زاوئے ب ا ح اور ب ح ا آپسمین برابر
ہونگے اور زاوئے س ا ح اور س ح ا بہی
آپسمین برابر ہونگے اسواسطے اونکے فرق
زاوئے س ا ب اور س ح ب بہی آپسمین برابر ہونگے
سوم ا ح قاعدہ کے کسی طرف مین گذرتا ہے تو ثبوت ظاہر ہے بعض وقت یہہ شکل اسطرح
بہی ثابت ہوتی ہے کہ مثلث دی ف کو
تصور مین مثلث ا ب س پر منطبق کرو چونکہ
ی ف اور ا ب برابر ہین تو نقطہ ف اوس
دائرہ کے محیط مین واقع ہوگا جو ا کی مرکز اور
ا ب کے نصف قطر پر کہینچا جاوے اور اسی دلیل سے
ف اوس دائرہ کے محیط مین واقع ہوگا کہ س کے مرکز اور س ب کے نصف قطر پر کہینچا جائے
پس ا س اوس نقطہ پر چاہیئے کہ واقع ہو جہان دائرے تقاطع کرتے مین اور ا س ب بہی اوس نقطہ پر
چاہیئے واقع ہو اسواسطے نقطہ ف الخ

شکل ۹ - آسے سمت بعید مین مثلث متساوی الاضلاع بنانیکی قید اسلئے ہے کہ اگر وہ نہ ہو
اور مثلث اوسطرف ہو جسطرف ا ی ہے تو ممکن کہ نقطہ ف نقطہ ا پر منطبق ہو جائے تو پہر ثبوت
کی اور صورت ہو جائے گی
اگر ب ا اور ا س ایک خط مستقیم مین ہون تو صورت سوال کی وہی ہو جائیگی جو (۱۱ شکل ام) کے

ا ف

یعنی ایک خط ایسا کھینچو کہ اوس زاویہ کے جو دو قائمہ کی برابر ہو تنصیف کرے
۹ ش ام مین اگر ف ا خارج کیا جائے تو وہ اوس زاویہ کی تنصیف کریگا جو چار قائموں سی بقدر زاویہ معلوم کے کم ہے
اس شکل کے ذریعہ سے ایک زاویہ چار و آٹھہ وغیرہ برابر حصون مین تقسیم ہوسکتا ہے
شکل ۱۰ اس شکل کی استعانت سی ایک خط مستقیم کے چار و آٹھہ برابر حصے ہوسکتے ہین اور مثلث متساوی الاضلاع کی جگہ مثلث متساوی الساقین بنائے تو بھی اسیطرح شکل ثابت ہوجاتی
شکل ۱۱ اگر نقطہ خط محدود کے ایک طرف پر واقع ہو تو بموجب دوسرے اصول موضوعہ کے خط کو خارج کرو اور پہلی طرح سے اپنا مطلب حاصل کرو ۱۳ ش ۳۴ کے حاشیہ کو دیکھو
دو نقطون کے درمیان فاصلہ وہ خط مستقیم ہوتا ہے جو اونمین وصل کیا جائے اور نقطہ کا خط مستقیم سے فاصلہ وہ چھوٹے سے چھوٹا خط ہوتا ہے جو اوس نقطہ سے اوس خط تک کھینچا جائے
اس شکل سے یہہ ثابت ہوتا ہی کہ ایک نقطہ سے ایک خط معلوم پر ایک ہی عمود نکل سکتا ہی اور یہہ عمود سب خطون سی جو اوس نقطہ سی اوس خط تک کھینچے جائین چھوٹا ثابت ہوسکتا ہے اور باقی خطوط مین سے جو اس عمود کے قریب ہوگا وہ چھوٹا ہوگا اوس خط سے جو اوس سے بعید ہوگا اور صرف دو خط مستقیم ہے برابر اس نقطہ سی کھینچ سکتے ہین جنمین سے ہر ایک عمود کی ہر سمت مین ہوگا یہہ خاصیت ۸ و ۷ ش ۳۴ سے ملتی ہوئی ہے
جو نتیجہ اس شکل کے ساتھہ الحاق کیا ہے وہ خالی اعتراض سی نہین سو سطی کہ ہم یہہ نہین جانتے کہ عمود ی ب کسطرح نکلیگا اگر مقالہ اول کے گیارہوین شکل کا حکم لگائین تو ضرور ہی کہ ا ب کو خارج کرین اور جب خارج کرین تو یہہ ثابت کرنا چاہئے کہ وہ ایک ہی طرح خارج ہوتا ہے کیونکہ بغیر اسکے ہم نہین جان سکتے کہ صرف ایک ہی عمود نکل سکتا ہے پس یہ دعوی اور دلیل ایک ہوا جاتا ہے یعنی ہمنے نتیجہ کے ثابت کرنیمین یہہ بات مان لی ہے کہ ایک خط مستقیم ایک ہی طرح خارج ہوتا ہے حالانکہ یہہ بات اور یہہ بات کہ دو خطوط مستقیم کا ایک خط مستقیم کا حصہ مشترک

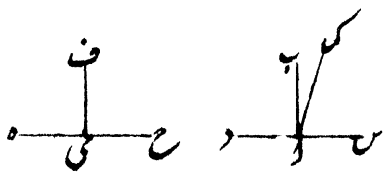
نہین ہو سکتا ایک ہی ہین
۱۳ش ام کے بعد یہہ نتیجہ بغیر کسی اعتراض کے ثابت ہو سکتا ہی سواسطی کہ فرض کرو اگر ممکن ہو کہ دو خطوط مستقیم اب س اور اب د کا س اب مشترک حصہ ہے نقطہ ب سے کوئی خط ب ی کہینچو تو بحکم (۱۳ش ام) کے زاوئے اب ی اور ی ب د ملکر برابر دو قائمون کے ہین اسواسطے زاوئے اب ی اور ی ب س برابر ہوئے زاویون اب ی اور ی ب د کے اسواسطے زاوئے ی ب س اور ی ب د برابر ہوئے اور یہہ باطل ہے
اگر اصول ہندسہ مین اسبات کا ذکر کرنا ضروری ہے کہ دو خطوط مستقیم کا ایک خط مستقیم حصہ مشترک نہین ہو سکتا تو اوسکے تخصیص گیارہوین شکل سے کیون کی گئی بلکہ اوسکا کام تو اوسے پہلے پانچوین ہی شکل مین پڑتا ہے اگر دو خطون کا حصہ مشترک اب ہو سکتا ہے اور نقطہ ب سے جدا ہوتا ہے تو ب س کے دوسری طرف دو مختلف زاوئے ان حصون کے خارج ہونے سے پیدا ہونگے اور ہر ایک اونمین کا برابر ب س کی ہوگا یہہ سب جہگڑے اگر ہم شرح خط مستقیم کو دیکہین تو رفع ہو جائینگے
شکل ۱۲ تیسرے اصول موضوعہ کا اقتضا یہہ ہی کہ پہلے خط س د وصل کیا جائے اور پہر مرکز س اور بعد س د پر دائرہ بنایا جائے۔ خط کو غیر محدود اسواسطے فرض کیا ہے کہ دائرہ خط کو کاٹ سکے۔
اقلیدس مین کہین تو یہہ لکہا ہے کہ خط زاویہ قائمہ بناتا ہوا نکالو اور کہین یہہ لکہا ہی عمود نکالو صورت اول مین ۱۱ش ام کا حکم اور صورت دوم مین حکم ۱۲ش ام کا لگایا گیا ہے مگر اب اس قید کی کچہہ ضرورت نہین ہے
شکل ۱۳۔ اس شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ایک خط مستقیم کے کسی ایک نقطہ پر کئی خطوط زاوئے بنائین تو وہ سب ملکر برابر دو قائمون کے ہونگے۔ دوم اگر دو خطوط مستقیم متقاطع ہون تو چارون زاوئے جو پیدا ہونگے ملکر برابر چار قائمون کے ہونگے۔ سوم جو خطوط متصل کسی دو متقابل

اب س اور اب د کی تنصیف کرینگے اونکے درمیان زاویہ قائمہ ہوگا۔
چہارم زاوئے اب س اور اب د ملکر برابر دو قائمون کے ہین اسلئے ہرایک کو تتمہ
دو قائمون کا کہتے ہین اور اگر دو زاوئے ملکر برابر ایک قائمہ کے ہون تو ہر ایک کو
تمامی قائمہ کے کہینگے

شکل ۱۴ ا - یہہ شکل ۱۳ ش ام کا عکس ہے اور مقابل سمتون کی قید اس سببسے لگائی گئی ہے
کہ اگر وہ نہو تو ممکن ہے کہ دو خطوط مستقیم ایک تیسرے خط مستقیم کے ساتھہ دو زاوئے قائمہ
اسطرح پیدا کرین کہ وہ خود دونو ملکر ایک خط مستقیم مین نہون - اقلیدس کی شکل مین
خط ب ی کا جسطرح اوپر بنا ہوا ہے او سطرح نیچے بہی واقع ہوسکتا ہے ثبوت دونو حالتون مین
ایک ہی جب یہہ کہتے ہین کہ دو زاوئے اب س اور اب ی ملکر برابر ہوئے دو زاویون
اب س اور اب د کے تو اونکی مساوات کا حکم علوم سے لگاتے ہین حالانکہ اوسمین
۱۱ علوم کا حکم لگانا ضرور ہے اسلئے بعض ترجمون مین دونون مین سے ایک ہی نہین لکہا ہے

گیارہوین علوم متعارفہ کا ثبوت

جسطرح یہہ علوم متعارفہ ثابت ہوا ہے اوسپر کوئی اعتراض موافق اصول اقلیدس کے نہین ہوتا
فرض کرو کہ اب زاویہ قائمہ د ا س کے ساتھہ
نقطہ ا پر بنا ہے اور ی ف زاویہ قائمہ ح ی ہ
کے ساتھہ نقطہ ی پر تو زاویہ ب ا س برابر ہوگا
زاویہ ح ی ف کے کوئی خط ا س متعین کرکے

ف ہ ی ح د ا ب ک س

ا د اور ی ہ اور ی ح برابر ا س کے بناؤ اب ہ ی ف کو د ا س پر اسطرح چسپان کرو کہ نقطہ ہ تو
نقطہ د پر ہو اور ہ ح منطبق د س پر ہو اور ب اور ف دونو ایک طرف د س کے ہو تو ح منطبق
س پر ہوگا اور ی منطبق ا پر اور ی ف منطبق ا ب پر اور اگر ا ب پر منطبق نہ ہو تو کسی

اور طرح مثلاً اک کی طرح واقع ہوگا تو زاویہ س اک برابر ہوگا زاویہ ہ ی ف کی اور زاویہ
س اک برابر ہے زاویہ ح ی ف کے لیکن زاوئے ح ی ف اور ف ی ہ آپسمین بموجب
فرض کے برابر ہین تو زاویہ د اک برابر ہوا زاویہ س اک کے لیکن زاوئے د اب اور
س اب بھی آپسمین برابر ہین اور زاویہ س اب بڑا ہے زاویہ س اک سے اسواسطے
زاویہ د اب بڑا ہوا زاویہ س اک سے تو زاویہ د اک بدرجہ اولے بڑا ہوا س اک سے
لیکن پہلے ثابت ہو چکا ہے کہ زاویہ د اک برابر ہے زاویہ س اک کے اور یہہ باطل ہے
اسواسطے ی ف منطبق اب پر ہوگا اور اسیواسطے زاویہ ف ی ح منطبق ب اس پر ہوگا
اور اوسکے برابر ہوگا

طالب علم کو چاہیے کہ وہ دعوی مین اس شرط کو کہ وہ خطوط جو زاوئے بناتے ہین مقابل سمتون سے
کھینچے جائین ضروری جانے اسلیے کہ اگر یہہ شرط نہو تو ہوسکتا ہے کہ خطوط ایک خط کے ساتھہ زاوئے
برابر دو قائمون کے بنائین مگر وہ ایک خط مستقیم مین نہون

شکل ۱۵ - اس شکل سے توضیح زاویہ کی تعریف کی ہوتی ہے اگر زاویہ کے راس پر سے خطوط مستقیم
اپنے مقابل طرف سی کھینچے جائین تو خطوط خارج شدہ مین ایسا میلان ہوگا
جیسا کہ اصلی خطوط مین تہا مگر مقام مختلف ہوگا

اقلیدس نے اس شکل کا عکس نہین ثابت کیا یعنی یہہ نہین ثابت کیا کہ اگر ایک نقطہ پر چار خطوط مستقیم
زاوئے ایسے بناوین کہ اونمین مقابل کے دو دو آپسمین برابر ہون تو مقابل کے خطوط مستقیم
ملکر ایک خط مستقیم مین ہونگے

ثبوت اس شکل کا نہایت مختصر اسطرح ہوسکتا ہے کہ مقابل کے ہر ایک زاویہ کا تتمہ دو
قائمون کا ایک ہی زاویہ ہے اسلیے مقابل کے زاوئے آپسمین برابر ہین

یہہ بات ظاہر ہے کہ جتنے زاویون کے تتمے آپسمین برابر ہون وہ آپسمین برابر ہوتے ہین اور جب وہ
عدد بہا برابر ہون تو اونکے تتمے یا تمم برابر ہوتے ہین

شکل ۱۶ - ہر ایک زاویہ مثلث کا دوسرے زاویہ کے تتمہ سے چھوٹا ہوتا ہے

شکل ۱۷ - یہہ شکل اپنے ماقبل کی شکل کا نتیجہ صریح ہے اور ۱۲ علوم متعارفہ کا عکس ہے مثلث کے زاویون کے باب مین ۳۲ شکل کافی ہے یہہ شکل اور سولہوین شکل ۵ و نو فصول ہین

شکل ۱۸ و ۱۹ - ان دونو شکلون مین باہم وہی تعلق ہے جو ۵ و ۶ مین تہا یعنی ایک دوسرے کے عکس ہے اور ہر عکس کا ثبوت برہان خلف سے ہوتا ہے اکثر طالب علم ان دونو شکلون کے کہنے مین دعوی کے آخر بیان کو ایسا خلط ملط کر دیتے ہین کہ یہہ نہین معلوم ہوتا کہ شرط کیا ہے اور اوسکی جزا کیا ہے

اگر بڑے ضلعے مین سے چھوٹے ضلع کے قطع کرنے کی جگہہ چھوٹے ضلع کو برابر بڑے ضلع کے بنالین تو بہی دعوی اسیطرح ثابت ہو جائیگا ان دونو اور پانچوین اور چھٹی شکلونکو ملاوین تو یہہ ایک دعوی بنیگا کہ ایک ضلع مثلث کا دوسرے ضلع سے چھوٹا بڑا برابر ایسا ہوتا ہے جیسا کہ اوسکے مقابل کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے چھوٹا بڑا برابر ہوتا ہے

شکل ۲۰ - اس شکل کا نام حماری اس سبب سے رکہا گیا ہے کہ پرکلس اپنی شرح مین لکہتا ہے وہ ایسی بدیہی ہے کہ گدہا بہی اوسے سمجہتا ہے

اس شکل کا یہہ نتیجہ صریح ہے کہ دو نقطون کے درمیان خط مستقیم سب خطون سے چھوٹا ہوتا ہے سواسطے کہ نقطہ آ خواہ کیسا ہی نزدیک اب کے ہو ب آ اور آ س کے مجموعہ سے خط مستقیم ب س چھوٹا ہی رہتا ہے اور یہہ بہی معلوم ہوتا ہے کہ مجموعہ تینون ضلعون کا ملکر ایک ضلع کے دوچند سے بڑا ہوتا ہے اور دو ضلعون کا تیسرے ضلع سے چھوٹا اور اس شکل سے یہہ بات بہی آسانی سے ثابت ہوتی ہے کہ حاصل تفریق دو ضلعونکا تیسرے ضلع سے چھوٹا ہوتا ہے -

یہہ شکل اس طرح بہی ثابت ہو سکتی ہے کہ تیسرے ضلع س آ مین سے س د برابر س ب کے قطع کرین تو نقطہ د کیا ضلع اس کے اندر واقع ہوگا یا باہر ہوگا اگر وہ باہر

واقع ہوتا ہے تو س ب بڑا س ا سے ہوا اسلئے س ب اور ب ا ملکر
بد جد اولے بڑے ا س سے ہوئے اور اگر د اندر واقع ہوتا ہے
تو ب د کو کہینچو چونکہ مثلث د س ب متساوی الساقین ہے اسلئے
زاویہ س د ب برابر ہے س ب د کے لیکن خارجہ زاویہ س ب
بڑا ہے بہ نسبت زاویہ داخلہ د ب ا کے ہے اور زاویہ خارجہ ب د ا بڑا ہے زاویہ داخلہ ا ب س
سے اس لئے زاویہ ب د ا بدرجہ اولے بڑا ہوا زاویہ د ب ا سے ہو اسطے ا ب بڑا ہوا د ا
اور اسلئے ا ب اور ب س ملکر بڑے ہوئے د ا اور د س یعنے ا س سے

شکل ۲۱ مثلث کے اندر ایک نقطہ تک جو دو خطوط مستقیم کہینچے گئے ہیں وہ ضرور ہے کہ قاعدہ کے
اطراف سے کہینچے گئے ہوں اگر اور طرح سے کہینچے جائینگے تو ممکن ہے کہ قاعدہ کے دو نقطوں سے دو خط مثلث
اندر ایک نقطہ تک کہینچے جائیں اور مجموعہ اونکا بڑا مجموعہ اضلاع سے ہو لیکن یہہ صورت اوس
حالت میں تو ممکن نہیں کہ مثلث متساوی الاضلاع یا متساوی الساقین جسکا قاعدہ ہر ایک ساق
سے چہوٹا ہوا اور سب صورتوں میں ممکن ہے کہ مثلث کے اندر ایک نقطہ ایسا دریافت کیا جائے کہ
اوسے دو خطوط مستقیم قاعدہ کے دو نقطوں تک کہینچے گئے ملکر بڑے مجموعہ اضلاع سے ہوں
اس شکل کے ثابت کرنیکے لئے جو برہان قائم کی گئی ہے اگر اوسکے نتیجہ کو اشکال منطقی میں لاکر تکالیں
تو حد اوسط اوسمیں داخل کرنی پڑے گی اور فقط یہہ دلیل کہ چونکہ ا ب اور ا س بڑے ہیں
ب ی اور ی س سے اور ب ی اور ی س ملکر بڑے ہیں ب د اور د س سے اسواسطے
ب ا اور ا س ملکر بڑے ہوئے ب د اور د س سے ایک شکل منطقی محذوف الطرف نتیجہ
نکالنے کے لئے غیر کافی ہوگی تکمیل اوسکی ان قضیہ کے شامل کرنے سے ہوگی کہ اگر ب ی اور ی س
ایک بڑی مقدار ب د اور د س سے ہو تو ہر ایک مقدار بڑی ب ی اور ی س سے بڑی ب د
اور د س سے ہوگی اور منطقی شکل یوں مرتب ہوگی
چونکہ ب ا اور ا س ی ہیں ب د اور د س اور کچھہ اور زیادہ شامل ہے

زاویہ ی د ف سے ہی لیکن ہم اسکو اسطرح ثابت کرتے ہین کہ فرض کرو د ف اور ی ح
کا نقطہ تقاطع ہ ہے تو بحکم (۱۶ ش ام) کے زاویہ د ہ ح بڑا بہ نسبت زاویہ د ی ح کے ہوگا
اور بحکم (۱۹ ش ام) کے زاویہ د ہ ح بڑا بہ نسبت زاویہ د ح ی کے ہے سو اسطے زاویہ د ہ ح
بڑا زاویہ د ح ہ سے ہوا اسواسطے وہ کم بہ نسبت د ح کے بحکم (۲۰ ش ام) کے ہوا
اسواسطے وہ کم بہ نسبت د ف کے ہوا

اگر سمن کی شرط کو اڑا دین تو دو اختلاف پیدا ہونگے اگر ف واقع ی ح پر ہوتا ہے تو ظاہر ہے
کہ ی ف بہ نسبت ی ح کے کم ہوگا اور اگر ف اوپر ی ح کے واقع ہوتا ہے تو مجموعہ د ف اور
ی ف کم بہ نسبت مجموعہ د ح اور ی ح کے بحکم (۲۱ ش ام) کے ہوگا اور اسیواسطے ی ف
کم بہ نسبت ی ح کے ہوگا

شکل ۲۴ و ۲۵ - اسمین وہی تعلق رکھتی ہین جو ۵ و ۶ شکل رکھتی تہین یا چوتہی اور آٹھوین -
چوتہی اور آٹھوین اور چوبیسوین اور پچیسوین شکلون کے دعوی اس ایک شکل مین آسکتے مین کہ
اگر ایک مثلث کے دو ضلعے برابر ہون دوسرے مثلث کے دو ضلعون کے موافق اپنی اپنی نظیر کے تو
باقی ضلع ایک مثلث کا دوسرے مثلث کے باقی ضلع سے چھوٹا بڑا برابر ایسا ہوگا جیسا کہ اوسکے
مقابل کا زاویہ ایک مثلث مین چھوٹا بڑا برابر دوسرے مثلث کے مقابل کے زاویہ سے ہے

شکل ۲۶ (۲۲ ش ام) کے بعد یہہ بات ظاہر ہوجایگی کہ اگر ایک مثلث کے دو زاوئے برابر
دوسرے مثلث کے دو زاویون کے موافق اپنی اپنی نظیر کے ہون تو تیسرے زاوئے بہی اون مثلثون
کے آپسمین برابر ہونگے اور اس شکل کا کام بہی ۳۲ ش ام سے پہلے نہین پڑتا اسلئے اگر یہہ شکل
بعد ۳۲ ش کے مقرر کیجائے تو اوسکے دعوے کے دو صورتین اسطرح اس ایک دعوی مین
آجاوینگی کہ اگر ایک مثلث کے تینون زاوئے برابر دوسرے مثلث کے تینون زاویون کے ہون
موافق اپنی اپنی نظیر کے اور اونکا ایک ایک ضلع مقابل مساوی زاویون کے برابر ہو تو
مثلث سب طرح سے برابر ہونگے

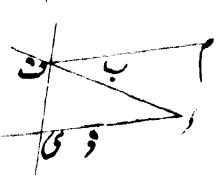
پہلا حصہ مقالہ اول کا یہان ختم ہوتا ہے اوسمین تین اشکال عظیمہ ثابت ہوئی ہین
۴ ش و ۸ ش و ۲۶ ش ان تینون شکلونمین یہہ ثابت کیا ہے کہ اگر مثلثون کے
تین تین جز آپسمین برابر ہون تو وہ مثلث سطح سے آپسمین برابر ہونگے اس سے یہہ خیال لمین
پیدا ہوتے ہین کہ جب دو مثلثون کے تین تین زاوئے آپسمین برابر ہون تو وہ آپسمین برابر
ہونگے یا نہین اور جب ایک مثلث کی دو ضلعے برابر دوسرے مثلث کی دو ضلعون کے موافق اپنی اپنی
نظیر کے ہون اور دو متساوی الاضلاعون کے مقابل کے زاوی بہی آپسمین برابر ہون تو بہی مثلث
آپسمین برابر ہونگے یا نہین پہلی صورت تو بعد ۳۲ ش ام کے ظاہر ہوجاویگی مثلث آپسمین نہین برابر
ہونگے دوسری صورتمین بہی ضرور نہین کہ مثلث متساوی ہون مثلاً ۱۱ ش ام مین یہہ بخوبی
عیان ہے کہ اگر ف ب ملاوین تو دو مثلثون ف ب ی اور ف ب د مین ضلع ف ب اور زاویہ ف ب س مشترک
ہین اور ضلع ف ی برابر ہی ضلع ف د کی لیکن مثلث سطح سی آپسمین برابر نہین ہین لیکن
بعض خاص صورتون مین مثلث سطح آپسمین برابر ہونگے اونکا حال لکہتے ہین
اگر دو مثلثون مین دو دو ضلعے اپنی اپنی نظیر کو برابر ہون اور دو متساوی ضلعون کے مقابل کے زاوئے
آپسمین برابر ہون اور باقی متساوی الاضلاع کی سامنے زاوئے کیا تو دونکے دونکی ہونا یا دونو منفرجہ یا ایک قائمہ
ہو تو مثلث سطح سے آپسمین برابر ہونگے فرض کرو کہ ا ب س اور دی ف دو مثلث ہین اور
اونمین ضلع ا ب برابر ہے ضلع د ی کے اور ب س برابر ی ف کے اور زاویہ ا برابر ہی زاویہ
د کے اول یہی فرض کرو کہ
دونو زاوئے س اور ف حاد ہین
اگر زاویہ ی برابر زاویہ ب کی ہے تو بحکم
(۲۶ ش ام) کی مثلث ا ب س برابر ہوگا مثلث ی د ف کے اور دعوی ثابت ہوگا اور اگر زاویہ ب
برابر زاویہ ی کے نہو تو فرض کرو کہ کوئی اونمین سے دوسرے سے بڑا ہوگا مثلاً ا ب ی بڑا سی ہو تو زاویہ
ا ب ج برابر زاویہ ی کے بناؤ تو بحکم (۲۶ ش ام) کے دو مثلث ا ب ج اور د ی ف سطح سے

زاویے متبادلہ ۳ و ۶ ۴ و ۵ اور ۱ و ۵ و ۲ و ۶ کو زاویے داخلے خارجہ
اور زاویے ۳ و ۴ و ۱ و ۲ کو ایک جہت کے زاویے داخلے کہتے ہین
اس شکل مین زاویے ب ی ف اور ی ف س متبادلے ہین اور زاویے ا ی ف اور ی ف د
بھی متبادلے ہین۔ اور خطوط متوازیہ مین اگر ایک خط دوسرے خط کا متوازی ہو تو دوسرا خط
بھی پہلے خط کا متوازی ہوگا

شکل ۲۸ اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ خط کے ہر جانب مین دو داخلی اور دو خارجی زاویہ پیدا ہونگے
زاویہ خارجہ ہ ح ب کے مقابل کا داخلہ زاویہ ح د ہوگا اور زاویہ خارجہ ف ہ د کے مقابل کا
داخلہ زاویہ ہ ح ب ہوگا

شکل ۲۹ عکس ۲۷ و ۲۸ کا ہے اقلیدس نے خطوط مستقیم زاویہ کی تعریف مین سلب خاصیت
کا ذکر کیا ہے کہ وہ خارج ہونے سے کہین نہ ملتے نہین
اقلیدس کے بارہوین علوم متعارفہ پر اعتراض یہہ کیا گیا ہے کہ وہ اصل مین بدیہی نہین ہے اسلئے وہ
علوم متعارفہ نہین ہے اور یہہ اعتراض اس سبب سے اور قوی معلوم ہوتا ہے کہ اوسکا عکس ۱۷ شکل میں
ثابت ہوا ہے علوم متعارفہ کے لئے یہہ ضرور ہے کہ وہ خود بدیہی اور اوسکا عکس بھی دونو بدیہی ہون اور ثبوت
کے محتاج نہون ۔ بعض نے حدود خطوط متوازیہ کو بدلا نہ اس علوم متعارفہ کی ترمیم کی تاکہ یہہ اعتراض
اور طرح سے رد کر دیا اوسنے بارہوین علوم متعارفہ کو ایک شکل ثابتی بنایا اور دو حدود اور ایک
علوم متعارفہ مقرر کئے اور پانچ اور شکلین ثابت کین اور بعد ان سب مقدمات کے اس علوم متعارفہ کو ثابت کیا
خطوط متوازیہ پر استدلال کے لئے جائے ۱۱ علوم متعارفہ کے خطوط متوازیہ کی تعریف کی گئی ہے کہ وہ
خطوط مستقیم ہین کہ جنپر ایک خط مستقیم واقع ہو تو زاویے متبادلہ انمین برابر ہون اسپر بھی اوسی
قسم کا اعتراض ہے جو پہلے علوم متعارفہ پر بھی کیا گیا ہے اسلئے کہ یہہ بھی عکس ۲۷ شکل کا ہے شاید اس
تعریف سے کچھہ آسانی ہو مگر اعتراض اوسپر بھی خوب ہوتا ہے
ڈاکٹر پلی فیر نے اپنی اصول علم ہندسہ مین اس علوم متعارفہ کی جگہ یہہ علوم متعارفہ مقرر کیا ہے کہ دو

خطوط مستقیم متقاطع ایک خط کے متوازی نہین ہوسکتے یہہ علوم متعارفہ نہایت واضح ہی مگر وہ
ہی ۳۰ ش ام کا ایک نتیجہ معلوم ہوتاہے

تمام حدود مین سے جو خطوط متوازیہ کے لئے مقرر ہوئے اون سب مین سے اس حدود پر اعتراض
قوی نہین ہوتا کہ خطوط مستقیم وہ مین جو نہ ایکدوسرے کے قریب کبھی ہوئے ہین نہ بعید ہمیشہ
اونمین فاصلہ برابر رہتاہی اور شاید اقلیدس کا ہی مطلب اس سے کہ وہ کبھی خارج ہونیسے
نہین ملتے یہی تہا کہ اونمین فاصلہ ہمیشہ یکسان رہتاہے۔ اسطرح اس علوم متعارفہ کی خوب
توضیح ہوگی — پانچوین اصول موضوعہ مین اقلیدس نے اس بات کو تسلیم کرلیاہے کہ جب
دو خط تیسرے خط کے ساتہہ جو اونکو قطع کرتاہے زاویے دو قائمون سے کم بنائین تو وہ
خطوط آپسمین ملجائینگے اس اصول موضوعہ کی بداہت اس شکل سے معلوم ہوگی کہ
فرض کرو خطوط ف ب اور ی د خط ی ف سے نقاط ی
اور ف پر ملین اور زاویے ب ف ی اور د ی ب دو قائمون سے
کم ہون فرض کرو کہ خط ف م ایسا کہینچا جائے کہ مجموعہ
د ی ف اور م ف ی کا برابر دو قائمون کے ہو تو بحکم (۲۸ ش ام) کے ف م اور ی د
متوازی ہونگے اور اسیواسطے خارج ہونے سے کبھی نہین ملین گے لیکن ب ف نیچے ف م
سے واقع ہوتاہے تو ضرور ہے ی د سے خارج ہو کر کہین نہ کہین مثلاً ر پر ملجائے گا۔
جو کچھہ اوپر ہم نے بیان کیاہے اوس سے ظاہر ہوتاہے کہ اس اصول موضوعہ کے معنی یہہ ہین
کہ خط سے باہر جو نقطہ ہو اوس سے ایک خط سی زیادہ خط مستقیم متوازی نہین نکل سکتے +
یہہ مضمون نہایت بسط سے کرنیل طامسن نے اپنی اقلیدس کے ضمیمہ مین لکھاہی اور اوسمین کئی ترکیبین
بیان کی ہین خطوط متوازیہ کی تعریف خواہ اسطرح کرو جسطرح اقلیدس نے کی ہے یا اوسطرح سمجھو جو اون
نے اقلیدس کے تعریف کی ترمیم کی یا بالکل اختلاف کرکے نئی طرح سے اس مضمون کو بیان کیا
وہ سبکے سب صحیح ہین اور اونکی بداہت آنکھون سے محسوس ہوتی ہے +

اقلیدس نے اول خاصیتین شناخت کی یعنی اون خطوط مستقیم کی جو ایک دوسرے سے ملتے ہین اور تیسرے خط مستقیم سے قطع ہوئے ہین بیان کین اور یہہ خواص اون خطوط مستقیم کے بیان کیے ہین جو آپس مین ملتے نہین اور ایک تیسرے خط مستقیم سے قطع ہوتے ہین جسکے عکس کو خود اوسنے سترہوین شکل مقالہ اول مین ثابت کیا ہی جس شخص نے اس مضمون کو لکہا ہی اوسنے یہہ ضرورت بیان کی ہے کہ خطوط متوازیہ کی تعریف مین کوئی خاصیت موجبہ ضرور ہونی چاہیے اور سب سے زیادہ عمدہ تحریر اس باب مین وہ ہے جو بارہوین علوم متعارفہ کو بعد سترہوین شکل کے ایک شکل اثباتی بناکر ثابت کیا ہے دو خطوط مستقیم ایک سطح مستوی مین جو خارج ہونے سے ملتے نہین اون کی دو صورتین ہین ایک یہہ کہ انفراجی اور انضمامی بہ نسبت ایک دوسرے کے ہون دوسرے یہہ کہ نہون یہہ انفراج اور انضمام اون سمتون پر موقوف ہے جنمین وہ خارج کیے جائین

جب دو خطوط مستقیم پر ایک خط مستقیم واقع ہو اور ایک جانب کے دو زاوئے داخلی ملکر کم از دو قائمہ ہون تو وہ اس سمت مین انضمامی کہلائینگے یعنے خارج ہونے سے کہین نہ کہین ملجائینگے اور یہی مضمون بارہوین علوم متعارفہ کا ہی اور دوسری جانب مین مجموعہ دو داخلے زاویون کا دو قائمو سے بڑا ہوگا اور اوس سمت مین دونو خط انفراجی ہونگے یعنی خواہ اونکو کتنا ہی خارج کرو وہ کبہی آپسمین نہین ملنے کے

دو خطوط مستقیم کا مقام جب ایسا محدود ہو جاے کہ نہ وہ حالت انضمام پیدا کرسکین نہ حالت انفراج تو اونکو ایک دوسرے کا متوازی کہینگے اگر دو خطوط مستقیم متوازی ہون اور اونپر تیسرا خط واقع ہو تو جو زاوئے پیدا ہونگے اونکی یہہ خاصیتین ہون گی خواہ وہ خط واقع ہونیوالا عمود ہو یا کسی خط متوازی پر عمود نہ ہو

(۱) دو زاوئے داخلے خط قاطع کے ایک جانب مین ملکر برابر دو قائمون کے ہونگے

(۲) زاوئے متبادلے جو خط قاطع کے جانبین مین واقع ہین آپسمین برابر ہونگے

(۳) زاویہ خارجہ اپنے مقابل کے زاویہ داخلہ کے برابر خط قاطع کے ایک جانب مین ہوگا

اگر خط قاطع ایک خط متوازی پر عمود ہو تو وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوگا

(۴) عمودی فاصلہ درمیان دونو خطون کے ہمیشہ یکسان رہیگا

اگر یہہ صحیح ہو کہ جملہ علوم متعارفہ تصدیقات نظری ہین اور اونکو بغیر اثبات کے مان لیا ہی اور تمام تصدیقات جو ثابت ہوتے ہین اونکا اثبات آخر کو اون تصدیقات پر جنکو تسلیم کر لیا ہی موقوف ہوتا ہے اور کچھہ ضرور نہین کہ یہہ تصدیقات موقوف علیہ پہلے تصدیقات کی ہون جو اول معلوم ہوئے ہون بلکہ وہ ایسے ہون کہ مبادی تصوریہ یعنی حدود سے پیدا ہوئے ہون تو مسئلہ خطوط متوازیہ کو اسطرح حل کر سکتے ہین کہ اوپر جو خواص بیان ہوئے ہین اونمین سے کسی ایک خاصیت کو خطوط متوازیہ مین مان لین اور اس ایک خاصیت کے مان لینے سے سب خواص باقی ثابت ہو جائینگے یہہ ان چار خاصیتونمین سی جنمین ایجاب پایا جاتا ہے اگر کسی ایک کو صحیح مان لین تو وہ مسائل خطوط متوازیہ کے لئے مبادی ہو جائینگے اور یہہ مبادی دو طرح کے ہو سکتے ہین یا تو یہہ کہ فاصلہ یکسان درمیان خطوط متوازیہ کے ہوتا ہے یا خط قاطع جو زاوئے بناتا ہے اونمین سے کسی دو کی مساوات مانی جائے اگر پہلی صورت کو مانین تو اوسمین سوا اس بات کے کہ عمودی فاصلہ مابین خطوط متوازیہ کے ہمیشہ یکسان ہوتا ہے اور یہہ بات ماننی پڑیگی کہ اگر ایک خط ایک متوازی خط پر عمود ہو تو وہ دوسرے خط پر عمود ہوگا اسلئے اسمین یہہ ایک اور بات زیادہ فرض کرنی پڑتی ہے اسلئے بہتر ہے کہ باقی تین خاصیتون مین سے کسی ایک خاصیت مثلاً زاوئے داخلہ اور خارجہ جو خطوط متوازیہ خط قاطع کے ساتھہ بناتے ہین اونکو آپسمین برابر مان لین

(۲۹) شکل (ثبوت مین بہت سی ترکیبین ایسی بیان ہوئی ہین کہ جنکے سبب سے ۲۹ شکل مقالہ اول مین بدون علوم متعارفہ کا حکم نہ لگایا جاوے اونمین سی سب سے اچھی ترکیب پلی فیر نے اختیار کی ہی اور اونے جو علوم متعارفہ اس علوم متعارفہ کی جگہ مقرر کیا ہے وہ سب سے زیادہ مناسب ہے اور اسپر کوئی اعتراض نہین ہوتا اور اس علوم متعارفہ اقلیدس کو (۲۷ شکل م) کے بعد جو اوسکا عکس ہے

ثابت کرنا چاہیئے

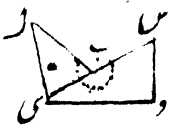
شکل ۳۰- سطح ثابت ہو سکتا ہے اگر اب اور ی ف مین سے ہر ایک متوازی س د کا ہو تو وہ آپسمین متوازی ہونگے اقلیدس نے جو صورت ثابت کی ہی وہ تو بدیہی ہے احتیاج ثبوت کی بہی نہین اسلیئے کہ جب اب اور س د ی ف سی جو اونکے درمیان مین واقع ہے نہین ملتے ہین تو وہ آپسمین کسطرح مل سکتے ہین

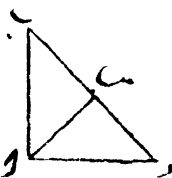
شکل ۳۲- اس شکل سے ظاہر ہی کہ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ برابر اوسکے باقی دو زاویون کے مجموعہ کے ہو تو وہ زاویہ قائمہ ہوگا ۳۱ ش ۳م مین اس حکم کی ضرورت پڑتی ہے - مثلث متساوی الاضلاع کا ہر ایک زاویہ برابر دو تہائی قائمہ کے ہوتا ہے (۵ اش ۴م) اگر مثلث متساوی الساقین کا زاویہ راس قائمہ ہو تو باقی زاویون مین سے ہر ایک نصف قائمہ ہوگا - سب سے زیادہ بکار آمد نتیجہ یہہ ہے کہ اگر دو مثلثون کے دو زاویے اپنی اپنی نظیر کو برابر ہون تو تیسرے زاویے بہی اونکے آپسمین برابر ہونگے اسواسطے کہ بحکم (۱۱ علوم) کے دو قائمے برابر ہو دو قائمون کے ہین اسلیئے (۳۲ ش ا م) ایک مثلث کے تینون زاویے ملکر برابر ہونگے دوسرے مثلث کے تینون زاویون کے اور بموجب ۲ علوم کے مجموعہ ایک مثلث کے دو زاویون کا برابر ہے دوسرے مثلث کے دو زاویون کو بحکم (۳ علوم) کے تیسرے زاویے بہی آپسمین برابر ہونگے مثلث کے تینون زاویے ملکر برابر دو قائمون کے بغیر اخراج ضلع کی بہی ثابت ہو سکتے ہین اسطرح کہ کسی زاویہ اوسکے مقابل کے ضلع کا متوازی کھینچے باقی ثبوت آگے آسان ہی اس شکل سے یہہ صاف ظاہر ہوتا ہے کہ مثلث کا تیسرا زاویہ باقی دو زاویون کے مجموعہ سے لگاؤ نہین رکہتا بلکہ اگر مجموعہ دو زاویون کا معلوم ہو تو تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہی - ایک زاویہ سے اور زاویون کے درمیان خطوط وصل کرنے سے نتیجہ اول ثابت ہو سکتا ہے

دوسرے نتیجہ مین زاویہ خارجہ مستقیم الاضلاع کے معنی یہہ ہین کہ دو ضلعے شکل کے جس نقطہ پر ملتے ہین اوس سے کوئی ایک ضلع خارج کیا جائے تو اوس نقطہ پر جو زاویہ مابین ضلع غیر ممدود اور ممدود

کے پیدا ہوگا زاویہ خارجہ کہا جائیگا اور ضلع کوئی سا خارج کیا جائے ایک ہی بات ہے اسلئے کہ بحکم (۱۵ ش ا م) دونوں زاوئے جو ہر طرح پیدا ہونگے آپس میں برابر ہونگے

اقلیدس نے یہ اشکال مستقیمۃ الاضلاع لکھے ہیں جنکے زاویون کا رخ اندر کی طرف ہے -

ہم دوسری طرح سے شکل ایسی بناتی ہیں جسمین زاویہ ا ب س کا رخ باہر کیطرف واقع ہے اور وہ دو قائموں سے کم ہے لیکن وہ زاویہ داخلہ شکل ا ب س د ی کا نہین ہے یہان شکل کا زاویہ داخلہ وہ ہے جو چار قائموں سے بقدر زاویہ ا ب س کے کم ہے اس زاویہ داخلہ کو جو زائد از دو قائمہ ہے زاویہ مندرجہ کہتے ہیں نتیجہ اول تو ان شکلون پر کہ ایک زاویہ مندرجہ رکھتی ہے صادق آتا ہے مگر نتیجہ ثانی نہین -

یہہ بھی ظاہر ہے کہ کسی مستقیمۃ الاضلاع کے زاویے ملکر برابر طاق قائموں کے نہین ہوتے

اس شکل کی اعانت سے ایک خط مستقیم پر عمود اوسکے ایکطرف سے بغیر اخراج خط کے نکل سکتا ہے فرض کرو کہ خط معلوم ا ب کی طرف ا سے عمود ا د نکالنا منظور ہے ا ب پر مثلث متساوی الاضلاع بناؤ اور ب س کو د تک ایسا خارج کرو کہ س د برابر ب س کے ہو اور ا د ملاؤ تو وہ ا ب پر عمود ہوگا اسلئے کہ زاویہ س ا د برابر زاویہ س د ا کے اور زاویہ س ا ب برابر زاویہ س ب ا کے اسلئے زاویہ د ا ب برابر ہوا زاویون د اور ا کے اور اسواسطے بحکم (۳۲ ش ا م) کے زاویہ د ا ب قائمہ ہوا

شکل ۳۳ مین یہہ قید کہ ایک ایک جہت کی اطراف مین خطوط ملائین ضرور اسلئے اگر اوسکو اڑا دین تو شبہ پڑیگا کہ آیا اطراف ا ا اور س مین ا در ب اور د مین خطوط ا س او ب د ملائے گئے ہین یا ا د و ا اور ب و س مین خطوط ا د اور ب س ملائے گئے ہین

شکل ۳۴- نتائج عام اس شکل کے بہ تفصیل ذیل ہین

اول اگر دو متوازی الاضلاعون مین سے ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ برابر ہو
دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے تو اونکے باقی سب زاویے آپسمین برابر ہونگے

دوم اگر ایک متوازی الاضلاع کا زاویہ قائمہ ہو تو سب اوسکے زاویے قائمے ہونگے

سوم اگر وتر ا د اور ب س کھینچے جائیں تو یہ ثابت ہوگا کہ ذوارتعہ الاضلاع جسمین کوئی دو خاصیتین
ان خاصیتون مین سے ہو وہ متوازی الاضلاع ہوگی

اول متوازی ہونا اب اور س د کا	ششم متساوی ہونا زاویا اب د و س کا
دوم متوازی ہونا اس اور ب د کا	ہفتم ا د کا ب س سے تنصیف ہونا
سوم مساوی ہونا اب اور س د کا	ہشتم ب س کا ا د سے تنصیف ہونا
چہارم متساوی ہونا اس اور ب د کا	نہم سطح کا ا د سے تنصیف ہونا
پنجم متساوی ہونا زاویا ا اور د کا	دہم سطح کا ا د سے تنصیف ہونا

جب ان دس مین سے دو دو کی ترتیب لین تو ۴۵ ترتیبین پیدا ہونگی اور ہر ترتیب سے آٹھ خاصیتین
باقی ثابت ہونگی اسلیئے ذوارتعہ الاضلاع کے باب مین تین سو ساٹھ شکلین بن سکتی ہین طالب العلم کے لئے
نہایت عمدہ مشق ہے

شکل ۳۵- ۲۶ شکل سے ۳۴ شکل تک دوسرا حصہ مقالہ اول کا ختم ہوا اور ۳۵ شکل سے تیسرا حصہ
شروع ہوا اور یہان سے مساوات کے نئے معنی شروع ہوئے ہین یعنی وہ بات نہین رہی کہ انطباق سے
مساوات بتلائی جائے

آخر بیان شکل کا خوب واضح نہین ہے مسن نے اثبات کو بدل کر یہہ خیال کیا ہے کہ دو منحرفین مین جو
مشابہت اور مقدار مین ایک ہی ہین اور اونمین ایک ہے مثلث اب ی اور دوسرے مین مثلث د س ف
کو تفریق کیا اور باقی کو بحکم (۳ علوم ام) کے برابر کیا یعنی متوازی الاضلاع اب س د برابر ہوئے
متوازی الاضلاع ی ب س ف کے

۴۸ شکل مین متوازی الاضلاعین جو ملتی ہین وہ ایک دوسرے کی اندر کچھہ ہین اور کچھہ باہر مثلث جسکا
قاعدہ ب س ہے اوسکا مشترک حصہ ہے اور مثلث جسکا قاعدہ د ی ہے وہ دونو متوازی الاضلاعون
سے باہر ہے جب مثلث ا ب ی کو برابر مثلث د س ف کے ثابت کر چکے تو ان مساویون مین (شرح)
سے مثلث جسکا قاعدہ د ی ہے ساقط کرین اور ان باقیون مین سے ہر ایک پر مثلث جسکا قاعدہ
ب س ہے زیادہ کرین تو متوازی الاضلاع ا ب س د برابر ہوگی متوازی الاضلاع ی ب س ف
کے متوازی الاضلاعون ا ب س د اور ی ب س ف کے مساوات (ش ۳) مین شکل ی ب س د
کے زیادہ کرنے سے ہر ایک مثلث ا ی ص اور د س ف پر ثابت ہو سکتی ہے اس شکل مین فقط
مساوات کے یہی معنی لئے گئے ہین اور وہ معنی نہین رہے کہ دو شکلون کے سب اجزا منطبق ہون
شکل ۳۸- اس شکل سے یہہ بات سمجھی گئی ہے کہ دو نو مثلثون کے قاعدے ایک خط مستقیم مین ہون
اگر شکل مین نقطہ ی نقطہ س پر اور نقطہ د نقطہ ا پر منطبق ہون تو ایک مثلث کا ایک اوپہ دوسرے
مثلث ایک اوپہ کا تتمہ ہوگا پس اس سے یہہ خاصیت ثابت ہوئی کہ اگر دو مثلثون کے دو دو ضلعے آپسمین
برابر ہین موافق اپنی اپنی نظیر کے اور اونکے زاوئے درمیانی تتمہ ایک دوسرے کے ہون تو وہ دونو
مثلث آپسمین برابر ہونگے

مثلثون مین دو طرح کی مساوات ہوتی ہے ایک تو یہہ کہ وہ سب طرح سے آپسمین برابر ہون یعنی ضلعے
اور زاوئے اور رقبے اونکے مساوی ہون دوم یہہ کہ صرف رقبے برابر ہون اول کو مساوات
مثلثون کی اور دوم کو معادلہ مثلثون کا کہتے ہین

شکل ۳۹- اگر برابر مثلثون کے جو ایک قاعدہ یا برابر قاعدون پر چالیسوین شکل کی طرح واقع ہون
اور اونکی راس ملائی جاوین تو ایک خط مستقیم پیدا ہوگا اور اوسکو مقام النقاط برابر مثلثون کے
راسون کا جو ایک قاعدہ یا برابر قاعدون پر واقع ہون کہتے ہین

ہندسہ سطحیات مین مقام النقاط وہ خط مستقیم یا خط منحنی ہوتا ہے جسکا ہر ایک نقطہ ایک خاص شرط کو پورا کرتا ہے
اور کوئی اور نقطہ اس شرط کا پورا کرنیوالا نہین ہوتا دوم مقام النقاط خط مستقیم اور دائرہ کو توسمجھنے کے

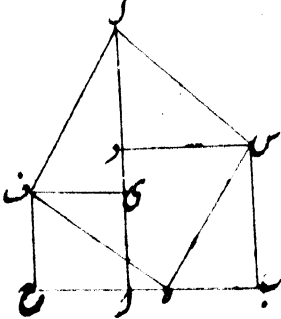
باقی سب مقام النقاط ضمنین ترا شہائے مخروطی ہی شامل ہین جبر مقابلہ سے بوساطت
مساوات مسطحہ وقطبیہ کے بخوبی وکما ینبغی تحقیق ہو سکتے ہین
شکل ۴۴- دلیل خلف کی بغیر اس شکل کو اسطرح ثابت کر سکتے ہین کہ ب د اور س د ملائین تو بحکم
(۳۸ ش ا م) کے مثلث د ب س اور د ی ف آپسمین برابر ہونگے اور مثلث ا ب س اور
د ی ف بموجب فرض کے آپسمین برابر ہین تو بموجب علوم متعارفہ اول کے مثلث د ب س اور
ا ب س آپسمین برابر ہونگے اور اسیواسطے بحکم (۳۹ ش ا م) کے ا د متوازی ب س کا ہوا
شکل ۴۱- اسکا عکس اقلیدس نے یہہ نہین ثابت کیا کہ اگر ایک متوازی الاضلاع دو چند ایک مثلث سے
ہو اور دونو ایک قاعدہ پر یا برابر قاعدون پر ایک ہی جانب مین واقع ہون تو وہ درمیان
خطوط متوازیہ کے ہونگے اور یہہ بہی آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر دو برابر مثلث درمیان
ایک خطوط متوازیہ کے واقع ہون تو ایک قاعدہ پر یا برابر قاعدون پر واقع ہونگے
شکل ۴۴ اس شکل مین اقلیدس نے یہہ نہین ثابت کیا کہ ا ہ اور ف ح آپسمین ملینگے یہہ بات
آسانی سے ثابت ہو سکتی ہے
شکل ۴۵- فقط مستقیم الاضلاع چار ضلعے کے بنا کر شکل ثابت ہوئی اگر مستقیم الاضلاع معلوم
زیادہ اضلاع کی ہو تو ایک زاویہ سے مقابل کے زاویون مین خط ملا کر اوسکو مثلثون مین تقسیم کر لو اور یہہ
ایک تیسرے متوازی الاضلاع برابر تیسرے مثلث کے ل م پر بنالو جسکا ایک زاویہ برابر زاویہ ی کے ہو
اور علی ہذا القیاس اور مثلثون کی کیفیت ہے جنسے شکل معلوم مرکب ہے
شکل ۴۶ مربع ایک شکل قائم الزوایا متساوی الاضلاع ہوتی ہے اسلئے اوسکی سطح یا رقبہ عدد سے
تعبیر ہو سکتا ہے اگر پیمانہ واحد خطی ایک ضلع کا معلوم ہو اسکا بیان مقالہ دوم کے شکل اول مین کیا گیا ہے
طالبعلمون کو دیکہنا چاہیے کہ مربع مین اور دو برابر عددون کے حاصلضرب یعنی عدد کے مربع اور مربع کے ضلع
اور عدد کے جذر مین مماثلت ہی یہان یہہ تمیز کرنی بہی ضرور ہے کہ دو برابر عددون کا حاصلضرب
جسکو مربع عدد کہتے ہین اور ایک خط معلوم کا مربع دریافت کرنا ہمیشہ ممکن ہے لیکن اوسکے

عکس کی یہہ کیفیت ہے کہ مربع معلوم کا اگرچہ ضلع شکل مین معلوم ہوتا ہے مگر اوسکے ضلع مین پیمانہ
واحد کے صحیح تعداد جبہی دریافت ہوگی کہ عدد معلوم مربع ہو مثلاً مربع معلوم کے رقبہ مین ۹ پیمانہ
واحد ہون تو اوسکے ضلع مین تعداد پیمانہ واحد کی جذر ۹ کا ۳ ہوگی لیکن اگر رقبہ مربع معلوم
مین ۱۲ پیمانہ واحد ہون تو کوئی عدد ایسا نہین دریافت ہوسکتا کہ وہ صحیح صحیح تعداد پیمانہ واحد کی
ضلع مربع مین بتلادے لیکن تخمیناً و تقریباً تعداد جسقدر چاہین دریافت ہوسکتی ہین

شکل ۴۷ موجد اس مشہور شکل کا حکیم ارشمیدس مشہور ہے اور طرح طرح کی داستانین اوسکی
ایجاد کے باب مین بیان کی گئی ہین

مثلث قائم الزوایا مین زاویہ قائمہ کے سامنے کی ضلع کو وتر کہتے ہین اور باقی اضلاع کو مقام کی حیثیت
سے قاعدہ اور عمود کہتے ہین

مثلث ہ ب س کے باہر کیطرف مربع بناکر شکل کو ثابت کیا ہے اور مربعے کئی طرح بن سکتے اول تینون
مربع اندر کیطرف ہین (۲) ایک مربع اندر کی طرف اور باقی دو مربعے باہر کیطرف (۳) ایک مربع
باہر کی طرف اور باقی دو اندر کی طرف

مہندسین نے طرح طرح سے اس شکل کو ثابت کیا ہے سب سے زیادہ عمدہ یہہ ثبوت ہے جو ذیل مین لکھا جاتا ہے

فرض کرو کہ دو مربعے اب س د اور ای ف ح
اسطرح ملاکر کھینچے گئے ہین کہ اونکے قاعدے ایک خط
مستقیم مین ہین ح ہ اور ی ک برابر اب
کے بناؤ اور ہ س اور ہ ف اور س ک اور ک ف
ملاؤ تو یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ مثلث د ہ س سطح مین برابر مثلث ف ی ک کو ہے اور مثلث ک د س
برابر مثلث ف ح ہ کے ہے اسواسطے دونو مربعے برابر شکل س ک ف ہ کے ہوئے اور یہہ بموجب [illegible]
کے ثابت ہوسکتا ہے کہ شکل س ک ف ہ ایک مربع ہے اور مثلث قائم الزاویہ کا س ہ وتر ہے اور اوسکے
اضلاع س ب اور ب ہ برابر ہین مربعوں کے اضلاع کے یہین کسی شکل کا حکم ۴۴ شکل سے آگے کا نہین آیا اور یہہ سبھین

اور خوبی ہے کہ مربع اسطرح قطع ہوئے ہین کہ اگر دو مربعونکے ٹکڑونکو بڑے مربع پر رکہین
تو وہ بالکل منطبق ہوجاوینگے اس شکل کی استعانت سے ایک مربع برابر مجموعہ مربعات معلوم
کے دریافت کرسکتے ہین اور ایک مربع معلوم کے اضعاف کے برابر مربع بنا سکتے
ہین یا ایک مربع برابر دو مربعون معلوم کے فرق بنا سکتے ہین بعض مثال ایسی
ہوتی ہین کہ اُنمین اس شکل کی صداقت آنکھونکو دکہائی دیتی ہے مثلاً اس مثال مین
کہ مثلث قائمۃ الزاویہ کے ضلعے ۳ و ۴ و ۵ پیمانہ واحد ہون اگر اضلاع کو موافق ان
احاد پیمانہ واحد کے تقسیم کرکے خطوط متوازی اضلاع مربعون کے جو اُنپر بنائے جائین
نکالین تو ۹ و ۱۶ و ۲۵ چہوٹے چہوٹے مربعے پیدا ہونگے اور اُنمین سے ہر ایک کی مقدار یکسان
ہوگی اور مجموعہ تعداد مربعونکا جنمین قاعدہ اور عمود کے مربعے تقسیم ہوئے ہین برابر ہین تعداد
مربعونکے جنمین وتر کا مربع تقسیم ہوا ہے اور اسیطرح اُن مثلث قائم الزاویہ مین جنکے
اضلاع مین ۳ و ۴ و ۵ پیمانہ واحد یا اُن اعداد کے اضعاف متساویہ پیمانہ واحد ہون
تو اُنمین بھی اسیطرح کی صورت پیدا ہوسکتی ہے اس شکل کا نام عروسی ہے عروس عربی مین
کثرت مال کو کہتے ہین پس یہہ شکل بھی کثیر النفع کثرت مال کیطرح ہے اسلئے اوسکو عروسی کہتے ہین
یا اس سبب سے کہ اوسکی شکل حجلہ عروس کے مشابہ ہے غرض انہی خوبیون کے سبب سے اوسکو عروس الہندسہ کہتے ہین
شکل ۴۸ - یہہ عکس ہے شکل ۴۷ کا یعنی اوس شکل مین یہہ نتیجہ مان لیا کہ برابر خطون پر مربعے بنائی گئی برابر ہوتے ہین اور اوسکا
عکس یہی مان لیا کہ برابر مربعون کے ضلعے برابر ہوتے ہین اس نتیجہ کا الحاق ۴۷ شکل کے ساتہہ مناسب ہے
اصول مقالہ اول اقلیدس مین اشکال مستقیمۃ الاضلاع سے بحث کی گئی ہے اول حدود لکھے پہر اصول
موضوعہ بیان کئے جنسے کہ شکلین بنتے ہین اور پہر علوم متعارفہ کا ذکر کیا اور یہہ وہ مبادی ہین جنسے کسی
اون چیزون کا کہ حدود مین بیان کی گئی ہین مقابلہ کیا جاتا ہے اور یہہ بہی تحقیق ہوتا ہے کہ یہہ مبادی
تصویریعنی حدود اور شکلون کے خواص خیالات باطلہ نہین ہین بلکہ وہ نفس الامر ہین اور وہ تصور قدرتی
چیزون کو دیکہنے سے پیدا ہوتے ہین جن حکما نے ان سبکو خیالات باطلہ بتلایا ہے اونہون نے

بڑی غلطی کی ہے اونکے مفہومات بالکل سمجھ مین اور اونکے خواص سطح پر صحیح صحیح استدلال ہوسکتا ہے
اس مقالہ کے تین حصے ہوسکتے ہین پہلے حصہ مین اصلیت و خواص مثلث کی بلحاظ اضلاع اور زاویون
کے اور بہران اضلاع اور زاویون کا باہم مقابلہ کا ذکر ہے اور دوسرے حصہ مین خواص خطوط متوازیہ
کے اور متوازی الاضلاعون کے لکہے ہین اور پہر مثلث قائم الزاویہ کے قاعدہ اور عمودکے مربعون کی
مساوات وتر کے مربع کے ساتہہ بیان کی ہے

جب مقالہ اول کو طالب علم شرح کر پڑہ لین تو اونکو چاہئے کہ شکلون پر نئی نئی حروف لکہین اور
اونکو ثابت کرین اور جہان ممکن ہو وہان شکل بہی کچہہ نئی طرح سے بنا دین تاکہ اونکو اپنے علم کا امتحان
ہوجائے کہ ہم یہانتک دسکو سمجہتے ہین اور جب سطح سے ملکہ حاصل ہوجائے تو حرفون کو بالکل اوڑا دینا
چاہئے اور دلائل و براہین کو بغیر حرفون کے بیان کرنا چاہئے اور سوالات ذیل کے جواب بہی کو طالب علم
مقدم سمجہین اور سمجہے وہ اون اصول کو جو وہ اونسے سیکہی ہین اشکال عملی اور اثباتی کے ثبوت
مین کام مین لائین

عقل اس بات کو جائز نہین کہتی کہ کوئی شخص مبادی اور اصول کو تو نہ سمجہے اور نہ اونکا یقین
کرے اور پہر بہی اونکا استعمال ٹہیک ٹہیک کرے یہان ارسطو کی رائے پر عمل کرنا چاہئے کہ جو شخص علم معقول
کو سیکہنا چاہتا ہے اوسپر اول یہہ فرض ہے کہ وہ اوس علم کے مبادی کو خوب سمجہے اور یقین کرے
جب آگے اور اوسے نتائج کا استنباط کرے فقط

سوالات مقالہ اول

(۱) اقلیدس نے کس علم کے اصول بیان کئے ہین اور اسکا کیا نام ہے ۹ ہندسہ مجسمات کسے کہتے ہین ۹
ہندسہ مستوی اور ہندسہ سطحات مین کیا فرق ہے

(۲) مقدار کی تعریف کرو اور جتنی قسم کی مقدارین علم ہندسہ مین بیان کی گئی ہین اونکا حال لکہو
اور بتاؤ کہ اول چہہ مقالہ اقلیدس مین کسکے مقدارون کا بیان ہے

(۳) تعریف خط مستقیم کی جو اقلیدس نے لکھی ہے بیان کرو - اقلیدس نے خط کی استقامت کا امتحان کس بات پر موقوف رکھا ہے اور اول ہی اول کس جگہہ وہ اوسی کام مین لایا ہے

اقلیدس کی تعریف پر خط مستقیم کی کیا اعتراضات ہوئے ہین اور اوسکی جگہ دوسری تعریف کیا کی گئی ہے - سطح مین مقام خط کی مقرر کرنیکے لیے کتنے نقطون کی ضرورت ہوتی ہے کب ایک خط مستقیم کو کہتے ہین کہ وہ دوسرے خط کو قطع کرتا ہے اور کب یہہ کہتے ہین کہ ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم سے ملتا ہے

(۴) ہندسہ مین نقطہ کے کیا معنی ہین اور خط مستقیم کی تعریف سے یہہ بات پیدا کرو کہ دو خطون کے تقاطع کرنیسے نقطہ پیدا ہوتا ہے

(۵) زاویہ مسطحہ کی تعریف جو اقلیدس نے لکھی ہے وہ بیان کرو - زاویہ کی غایت نہایت اقلیدس کے مقالہ اول مین کیا ہے - اقلیدس کیا زاویہ کو دو قائمون سے بڑا خیال کرتا ہے

(۶) کب ہم یہہ کہا کرتے ہین کہ ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے ساتھہ زاوئے قائمے بناتا ہے اور کب یہہ کہتے ہین کہ ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر عمود ہے +

(۷) مثلث کی تعریف کرو اور یہہ بیان کرو کہ کتنی اوسکی قسمین باعتبار زاویہ کے اور کتنی قسمین باعتبار اضلاع کے ہین

(۸) اقلیدس نے دائرہ کی تعریف مین کیا لکھی ہے - ہمنے جو تعریف دائرہ کی لکھی ہے اوس مین بتلاؤ کونسی بات فرض کرنی پڑتی ہے - ثابت کرو کہ اس حدود مین اور سب حدود مین بعض مجہولات کو مان لیا ہے

(۹) اقلیدس نے جو تعریف دائرہ کی لکھی ہے اوس پر یہہ اعتراض کیا گیا ہے کہ پہلی حد دوسری یہہ ثابت کرنا چاہیے کہ ایسی سطح مستوی کا ہونا ممکن ہے اور ایسی سطح مستوی کا ممکن ہونا بدیہیات سے نہین ہے اسلئے احتیاج اثبات کی ہے اب تم بتلاؤ کہ یہہ اعتراض کس رتبہ کا ہے

(۱۰) اقلیدس نے جو ذوات اربعۃ الاضلاع مین لکھی ہین اونکی تعریف لکھو

(۱۱) حدود اور علوم متعارفہ اور اصول موضوعہ کی اصل بتاؤ کہ کیا ہے اور ہر ایک کی

توضیح کرو

(۱۲) اصول علم ہندسہ کی اسلوب ترکیبی پر جو اقلیدس نے اختیار کی ہے کیا اعتراض ہوتے ہین اور اور اسلوب ترکیبی کیا بیان ہوئے

(۱۳) علم ہندسہ اور طبیعات کی حدود مین کیا تمیز ہو سکتی ہے

(۱۴) ایک ٹہیک حدود بنانیکے لئے کیا ضرورت ہوتی ہے - حدود بہی کیا اشکال ہندسی ہین - کیا اوسکو جسطرح دل نے چاہا بنالیا ہے - اونمین تبدیلیان ہو سکتی ہین - یا ضیات مین حدود کسی علم کی اوسی علم مین ثابت ہو سکتی ہے -

(۱۵) اقلیدس نے جو اصول شکل بنانیکے تبلائے ہین وہ بیان کرو

(۱۶) وہ کونسے آلات ہین جنسے کہ اصول موضوعہ کی شبیہ تخمیناً کہنچ سکتی ہے اور یہہ بہی بتلاؤ کہ تخمیناً کی کیون شرط لگی ہے

(۱۷) دائرہ کسی مرکز پر کسی خط کو نصف قطر مان کر کہنچ سکتا ہے اس اصول موضوعہ اور اقلیدس کی اصل موضوعہ مین جو فرق ہو وہ بیان کرو

(۱۸) طبیعات مین سے کونسے ایسے اصول ہین جو علم ہندسہ کے علوم متعارفہ کے مطابق ہین -

(۱۹) اقلیدس کے بارہ علوم متعارفہ مین سے بتلاؤ کہ کونسی اونمین سے مخصوص علم ہندسے مین اور اون علوم متعارفہ کا عکس بہی بیان کرو بشرطیکہ وہ ہو سکتا ہو

(۲۰) اقلیدس نے امتحان مساوات کے جو دو طریقے اختیار کئے ہین اونکو بیان کرو انہوں مین علوم متعارفہ جسمین اصل انطباق کے بیان کئی گئی ہے کیا وہ کل براہین ہندسہ کے لئے ضرور ہین کیا یہہ کہنا درست ہے کہ یہہ انطباق مشاہدہ پر جسمین ایک حس ظاہری کام آتی ہے موقوف ہے

(۲۱) اگر علوم متعارفہ مین سے کوئی حدود بن سکتا ہے تو بتاؤ وہ کونسا ہے اور اگر یہہ ہو جائے تو نفع نقصان اوسکا بتاؤ

(۲۲) شکل عملی اور اثباتی اور اصول موضوعہ اور علوم متعارفہ کی تعریف کرو کیا کوئی علوم

متعارفہ اسم باسمے نہین ہے

(۲۳) دعوی شکل عملی اور اثباتی کے کونسی دو جز ہوتے ہین اور اقلیدس کے اول مقالہ کے ۴ و ۵ و ۱۸ و ۱۹ شکلون مین اون اجزا کو بتلاؤ

(۲۴) کب شکل عملی کو غیر مستقل کہتے ہین اوسکی مثال دو

(۲۵) کب ایک شکل ہندسی کو دوسری شکل ہندسی کا عکس کہتے ہین کیا شکل ہندسیہ عکس ہندسیہ واجب التصدیق ہوتا ہی کسواسطی ضرورت اسکی ہوتی ہے کہ عکس شکلون کا ثابت کرین اور کسطرح وہ ثابت ہو تا ہے

(۲۶) شکل ہندسیہ کی تعریف کرو اور بتاؤ عکس اور نقیض شکل ہندسیہ مین کیا فرق ہے اور اوسکی مثالین دو

(۲۷) بیان کرو کہ تمام براہین ہندسیہ حدود اور علوم متعارفہ پر مبنی ہین

(۲۸) منطق اور ہندسہ مین جو طور قضیون سے نتیجہ نکالنے کے ہین اونکو بیان کرو اور بتلاؤ کسطرح نتیجہ ہندسیہ منطق کے طور پر شکل بناکر نکال سکتے ہین

(۲۹) براہین ہندسیہ کتنے مقدمون سے بنتے ہین۔ فوائین براہین ہندسیہ کے کیا ہین

(۳۰) قضیہ ہندسیہ کے بڑے اصول کیا ہین

(۳۱) ثبوت عینی اور ثبوت بہ خلف کی تعریف کرو

(۳۲) اسلوب تحلیلی اور اسلوب ترکیبی کی اصطلاحا کیا معنی ہین اور انہین سے اقلیدس کس ترکیب کو اپنے اصول علم ہندسیہ کی اندر کام مین لایا ہے

(۳۳) نتائج ہندسیہ کو ضروریہ کب کہا کرتے ہین

(۳۴) اون حدود ہندسیہ کو بتلاؤ جو سارے پہلے مقالہ کے ثبوت مین کام آئے ہین

(۳۵) اگر شکل اول مقالہ اول مین خط معلوم کے دوسری طرف مثلث بنایا جائے تو ان دو مثلثون سے ملکر کون سی شکل بنے گی

(۳۶) شکل دوم مقالہ اول مین اگر دب ضلع مثلث متساوی الاضلاع داب کا دونون طرف خارج کیا جائے

اور دائرہ کو جسکا مرکز ب اور نصف قطر ب س ہے نقاط ح اور ۃ پر قطع کرے تو دوسرا دائرہ ح ‌ا ور دہ مین سے کسی ایک نصف قطر پر کہینچ کر دعوی کو ثابت کرو

(۳۷) دوسری شکل مین مثلث متساوی الاضلاع جو خط معلوم پر بنایا جائے اگر اوسکے راس نقطہ معلوم ہو تو شکل کو ثابت کرو

(۳۸) تیسرے اصول موضوعہ مین کونسی ایسی قید لگائی گئی ہے جسکے سبب سے ۲ و ۳ شکل ضروری ہوئی دوسری شکل مین یہہ کیا امر ضروری ہے کہ خط معلوم پر مثلث جو بنایا جائے وہ متساوی الاضلاع ہی ہو کیا ہم خط مستقیم معلوم پر مثلث متساوی الساقین بنا کر مطلب ثابت کر سکتے ہین

(۳۹) بتلاؤ کسطرح دوسری شکل کی یہہ صورت ہو سکتی ہے کہ ایک نقطہ معلوم سے ایک خط مستقیم معلوم کی برابر ایک سمت معلوم مین ایک خط مستقیم بنالین

(۴۰) ایک خط مستقیم مین سے جو دونو طرف غیر محدود ہے کس طرح ایک خط مستقیم معلوم کے برابر ایک خط کو قطع کروگے

(۴۱) شکل چہارم مقالہ اول کسقدر حدود پر اور کسقدر علوم متعارفہ پر موقوف ہے

(۴۲) شکل چہارم کا عکس اور یہہ اوسکا ثبوت عینی لکہو

(۴۳) شکل آٹہوین مقالہ اول اقلیدس کسطرح مثلثون کو جسپان کرنے سے بغیر ساتوین شکل کے ثابت ہو سکتی ہے

(۴۴) کیا ۹ شکل کے سب صورتون مین ہر بات کے لئے کہ مثلث متساوی الاضلاع کس سمت بنین کچہہ پرواہ نہ کرنی چاہیئے

(۴۵) بتلاؤ کسطرح خط مستقیم کی تنصیف پہلی شکل مقالہ اول سے ہو سکتی ہے

(۴۶) اگر ایک مثلث کی داخلی زاویون کی خطوط تنصیف کرین تو بتاؤ کون سی صورتون مین مقابل کے ایک ضلع کی یا ایک سی زیادہ ضلعون کی تنصیف کرینگے

(۴۷) دو خط مستقیم ایک حصہ مشترک نہین رکہہ سکتے یہہ بات کس شکل کی ضمن مین بیان کی گئی ہے

(۴۸) ۱۲اشکال میں کیا ضرور ہے کہ خط معلوم غیر محدود ہو

(۴۹) ۱۱اشکال میں ثابت کرو کہ جو نقطہ اوس عمود سے کہ خط دی کے نقطہ تنصیف سی نکالا جائے باہر ہوگا اوسکا فاصلہ خط کے اطراف دآ اور دی سے غیر مساوی ہوگا

(۵۰) کس شکل سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خط مستقیم وہ خط ہے جو درمیان دو نقطون کے سب سے چھوٹا ہے

(۵۱) ۲۰اشکال کے ثابت کرنے مین جو شکلین کام مین آئی ہین اونکے دعوے بیان کرو

(۵۲) ۲۱اشکال مین کیا یہہ بات دعوی کی صداقت کے لئے ضروری ہے کہ دو خطوط مستقیم جو مثلث کے اندر نکالی جائین وہ قاعدہ کے اطراف سی ہی نکلین

(۵۳) ۲۱اشکال مین زاویہ ب د س بتلاؤ کسقدر زاویہ ب ا س سے زیادہ ہے

(۵۴) ۲۲اشکال مین مثلث بنا سکنے کے لئے یہہ شرط کہ دو خطوط مستقیم ملکر تیسرے خط مستقیم سی بڑے ہون کیا ضرور ہے۔ اور اس شرط سے ثبوت علیٰ یا ثبوت بہ خلف مین کیہہ فائدہ نکلتا ہے۔

(۵۵) تین خطون سے مثلث بنانےمین اس شرط کا ہونا کہ دو اونمین سی ملکر تیسرے سے بڑی ہون جیسا ضروری ہے ایسا کیا تین زاویون سے بھی مثلث بنانے مین زاویون کے لئے شرط ہونی ضرور ہے کہ دو اونمین سے ملکر بڑے تیسرے سے ہون

(۵۶) ۲۲اشکال مین اگر شرط خطوط معلوم مین نہو تو بتاؤ شکل بننے مین کس جگہہ خلل پڑے گا

(۵۷) جب ضلعے مثلث کے ۱ و ۲ و ۳ پیمانہ واحد ہون یا ۱ و ۲ و ۴ پیمانہ واحد ہون تو ثابت کرو کہ موافق ترکیب اقلیدس کے مثلث نہین بن سکتا

(۵۸) ایسا مثلث بنانا جسکے زاوئے ایسے ہون جیسے اعداد ۱ و ۲ و ۳ ممکن ہی یا نہین اپنے جواب کو بہ براہین ثابت کرو یا رد کرو

(۵۸) ۲۴اشکال مین یہہ کہا کہ دی وہ ضلع ہے جو کسی ضلع سے بڑا نہین ہے کس وجہ سے ضروری ہے

(۵۹) وہ کونسی پہلی پہل شکل آئی ہے کہ جسمین دو رقبے ایسے جنمین برابر مین اور وہ ایک دوسرے پر چسپان ہوکر منطبق نہین ہوتے

(۶۰) کلیتاً کیا یہہ شکل صحیح ہے کہ اگر دو مثلثون کے تین تین جز آپسمین برابر ہون تو ہر صورت مین وہ مثلث سطح سے آپسمین برابر ہونگے وہ سب صورتین بیان کرو جنکا اثبات مقالہ اول مین ہوا ہے اور یہہ بھی بیان کرو کہ کونسی صورت اس شکل کی ایسی ہے کہ وہ بیان نہین ہوئی -

(۶۱) مثلث کے کونسے اجزا معلوم ہون کہ جس سے مثلث بنجائے

(۶۲) ۲۶ ش ام کا عکس بیان کرو اور بتلاؤ کہ کس صورت مین وہ صحیح ہے اور اوس صورت کو ثابت کرو

(۶۳) زاویہ درمیان اون دو عمودونکے کہ جو خطوط مستقیم معلوم پر کہ ایک نقطہ پر ملتے ہین نکالے جائین برابر ہوتا ہے اوس زاویہ کے جو اون خطون کے درمیان واقع ہے

(۶۴) اگر مثلثون کا ایک ایک ضلع اور دو دو زاویے آپسمین برابر ہون موافق اپنی اپنی نظیر کے تو کیا وہ مثلث سطح سے آپسمین برابر ہونگے

(۶۵) اسلوب ترکیبی اور اسلوب تحلیلی مین فرق بتلاؤ کہ کیا ہے اور کونسی شکل اقلیدس مین اسلوب تحلیلی سے ثابت ہے

(۶۶) کونسے خواص ہمکو دو خطوط مستقیم کے معلوم ہونی چاہئے کہ جسکا نتیجہ ہم یہہ درستی سے نکال سکین کہ وہ کبھی خارج ہونے سے آپسمین نہین ملینگے

(۶۷) خطوط متوازیہ کے باہمی جو عمدہ دو علوم متعارفہ لکھتے ہین اونکو بیان کرو اور بتلاؤ کہ وہ اول کس شکل مین کام آتی ہین

(۶۸) کیا ضرورت اس بات کے لیے ہے کہ خطوط متوازیہ کے لئے تو ایک خاص علوم متعارفہ مخصوص بنایا جائے اور دائرون کے واسطے نہین

(۶۹) پہلے مقالہ کے بارہوین علوم متعارفہ کا عکس کیا ہے اور کونسی دو شکلین اونکی متمم ہین

(۷۰) اگر دو خط ایسے ہون کہ وہ کبھی خارج ہونے سے ملتے نہون تو وہ سوا خطوط متوازیہ کے کچھہ اور ہو سکتے ہین اگر ہو سکتے ہین تو کس حالتمین

(۷۱) متصل کے زاویون اور مقابل کے زاویون اور راس کے زاویون اور متبادلہ زاویون کی تعریف کرو

اور بتاؤ کہ اقلیدس کی کسکس شکل مین اُنکا بیان ہے ؛

(۷۲) ۲۹ ش ام کا ثبوت بارہوین علوم متعارفہ پر منحصر ہے اُسکو توجیہ تم کوئی کر سکتی ہو

(۷۳) کونسے اعتراض اس علوم متعارفہ پر اور خطوط متوازیہ کے حدود پر ہوسکتے ہین" کیا
مشکلات اس معاملہ مین ہین رد اور بتاؤ کہ اور کیا قیاسات اثبات مین ہوتے ہین
اور اور وجوہات کس بنا پر ہین ؛

(۷۴) اگر یہ علوم متعارفہ مانا جائے کہ دو خطوط متوازیہ متقاطع ایک ہی خط کے متوازی
نہین ہوسکتے تو ثابت کرو کہ بارہوان علوم متعارفہ نتیجہ صریح ۲۹ ش ام کا ہے۔

(۷۵) ۲۷ ش ام سے ثابت کرو کہ فاصلہ مابین خطوط متوازیہ کے ہمیشہ یکسان رہتا ہے۔

(۷۶) اگر دو خطوط مستقیم متوازی نہون تو جو خطوط مستقیم اُنپر واقع ہونگے وہ زاویئے
متبادلہ جو پیدا کرینگے اُنمین فرق یکسان رہے گا۔

(۷۷) اگر خطوط متوازیہ کی یہ تعریف کیجائے کہ وہ خطوط ہین جو ایک خط مستقیم کے ساتھ
ہمیشہ یکسان مساوی میل رکھتے ہین تو ثابت کرو کہ کبھی کھینچے جانیسے آپسمین نہین
ملینگے اور ۱۲ علوم متعارفہ کو بھی اس تعریف سے ثابت کرو۔

(۷۸) زاویہ خارجہ اور داخلہ سے کیا مراد ہے مثال دیکر اچھی طرح سمجھاؤ ؛

(۷۹) مثلث کا کوئی ضلع خارج نکرو اور اُسکے تینون زاویونکو ملاکر برابر دو
قائمونکے ثابت کرو ؛

(۸۰) نتیجہ صریح کی تعریف کرو اور وہ دو نتیجے صریح جو ۳۲ شکل مین لکھے ہین بیان
کرو اور پہلے نتیجے کو اور طرح سے ثابت کرو اور بتاؤ اور نتیجے کیا اس شکل سے
نکل سکتے ہین ؛

(۸۱) ایک ٹکڑا کاغذ کا مثلث کی شکل کا ہے اُسکے تینون کونونکو اسطرح اُلٹو
کہ مشاہدہ مین آجائے کہ تینون زاویے مثلث کے ملکر برابر دو قائمونکے ہوتے ہین ؛

(۸۲) ثابت کرو کہ خطوط مستقیم جو مثلث کے زاویۂ داخلہ اور خارجہ کی تنصیف کرتے ہین اور خطوط مستقیم جو متوازی الاضلاع کی ایک جہت کے اندر دو زاویونکی تنصیف کرتے ہین اُنکے درمیان زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(۸۳) سطح متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے اور ضلعے آپسمین برابر ہوتے ہین اسکا عکس ثابت کرو اور یہہ بھی ثابت کرو کہ ذوالاربعۃ الاضلاع کے وتر آپسمین ایک دوسریکو تنصیف کرین تو وہ ذوالاربعۃ الاضلاع ایک متوازی الاضلاع ہوگی یا جب اُسکی وتر اُسکو ایسے چار مثلثونمین تقسیم کرتے ہون کہ اُنمین سے دو دو ملکر یعنی جنکا زاویۂ راس ایک ہی ہو آپسمین برابر ہون تو بھی وہ متوازی الاضلاع ہوگی ؛

(۸۴) ایک متوازی الاضلاع کے بنانے کے لئے کیا معلومات ہونی چاہیئے کہ جس سے یہہ شکل عملی مستقل یا غیر مستقل ہو جائے۔

(۸۵) اگر دو خطوط متوازیہ کے اطراف مین جو ایک سمت مین نہون خطوط مستقیم وصل کئے جاوین تو کونسی صورت مین وہ برابر ہونگے اور کونسی صورتمین غیر مساوی۔

(۸۶) اگر چار ضلعے کی شکل کو جو ایک قطر تنصیف کرے تو ضرور وہ متوازی الاضلاع ہوگی اُسکو ثابت کرو ؛

(۸۷) ۳۵ ش مین کسطرح سطح متوازی الاضلاع کے خطوط مستقیم سے ٹکڑے کرین کہ وہ ترتیب پاکر دوسری متوازی الاضلاع بنجائے۔

(۸۸) مثلث متشابہ اور متماثلہ مین فرق بتاؤ کہ کیا ہے اور اقلیدس کے مقالہ اول سے اُسکی دو مثالین

(۸۹) ایک نقطہ کا مقام التقاط کیا ہوتا ہے اور اُسکی مثالین مقالۂ اول سے مستنبط کرو

(۹۰) اگر برابر مثلث ایک قاعدہ پر یا برابر قاعدونپر خواہ ایک سمت مین قاعدہ کے یا دونو سمتونمین واقع ہون تو ثابت کرو کہ اُنکے ارتفاع آپسمین برابر ہونگے۔

(۹۱) اگر ۳۷ و ۳۸ ش ام مین مثلثات ایک ہی جہت مین نہ واقع ہون تو ثابت کرو کہ

خط مستقیم اُنکی راسونمین وصل کیا گیا قاعدہ کے خط سے تنصیف ہو گا

(۹۲) اگر ۴۳ ش ام مین منتہم مربع ہو بتاؤ کیا نسبت اُنکو کل شکل سے ہو گی -

(۹۳) ایک متوازی الاضلاع کے خط مستقیم پر چسپان ہونیکے کیا معنی ہین

(۹۴) ۴۵ ش ام مین متوازی الاضلاع کا کیا بنا کلیہ ہے ؛

۹۵ مربع کی تعریف ایسی کرو کہ وہ شرائط زائد سے خالی ہو اور اُسکے موافق

ایک خط مستقیم معلوم پر مربع بناؤ

(۹۶) مربع کے چارون زاویونکا مجموعہ برابر چار قائمونکے ہوتا ہے کیا اسکا

عکس بھی صحیح ہے اور اگر نہین ہے تو کیون ؟

(۹۷) اگر مربع کو یون خیال کرین کہ وہ ایسی شکل ہے کہ چار خطونسے گھری ہے

مگر وہ ایک سطح مین ہے نہین ہین تو زاویونکے باب مین کیا شرط ہونی چاہیئے کہ

مربع مطابق حدود کے ہو ؛

(۹۸) ۴۷ ش ام مین اسبات کے ثابت کرنے کی کیا ضرورت ہے کہ مربعے جو

اضلاع پر بنائے جائین اونکا ایک ضلع مثلث کے ایک ضلع کے ساتھہ ایک خط مستقیم مین ہو

(۹۹) دو برابر عددون کے حاصلضرب اور مربع مین مماثلت کن کن باتون کے فرض

کرنے سے ظاہر ہوتی ہے

(۱۰۰) مثلث جسکے ضلعے ۳ و ۴ و ۵ ہون قائم الزوایا ہے یا نہین

(۱۰۱) مربع کا ضلع اور قطر دونو ساتھہ کیا صحیح اعداد سے تعبیر ہو سکتے ہین -

(۱۰۲) ۴۷ ش ام کی استعانت سے کیا اعداد ا وسے ۱ و ۲ و ۳ وغیرہ خطوط مستقیم

سے تعبیر ہو سکتے ہین

(۱۰۳) ۴۷ ش ام کو سطح ثابت کرو کہ مربعے وتر مثلث کی طرف بنین اور ثابت کرو کہ

وہ اوس وتر کے مربع کے ضلعون سے ایسے حصون مین تقسیم ہوتے ہین کہ اگر اونکو مربع

دتر پر رکھین تو بالکل و نیز منطبق ہوجائین

(۱۰۴) اگر دوسرے شکل مقالہ دوم کی مان لی جائے تو ۳ شکل مقالہ اول کے دعوے کی کیا صورت ہوسکتی ہے

(۱۰۵) مقالہ اول اقلیدس مین جو مثلث اور متوازی الاضلاع کی خاصیتین ثابت ہوئین اونکو بتلاؤ

(۱۰۶) ایسی کوئی شکل مقالہ اول مین بتاؤ کہ وہ جزئے خاص اپنے مابعد کی ہون

(۱۰۷) بتلاؤ ۴۷ شکل ام مقالہ کے ثبوت کے لیے کتنی شکلون کا مقالہ اول مین ثابت ہونا ضرور ہے

(۱۰۸) کس طرح اکثر شکلون کا عکس ثابت ہوا ہے کیا یہہ قاعدہ کلیہ ہے کہ شکل کا عکس ہمیشہ ثابت ہوا کرے

(۱۰۹) اگر علم ہندسہ مین حساب کو مقدم خیال کرین تو پہر سطح اور خط اور نقطہ کی تعریف کسطرح کرینگے

(۱۱۰) مقالہ اول کی شکلون کی تقسیم کتنی قسمون مین ہوسکتی ہے

(۱۱۱) افلاطون نے خط مستقیم کی یہہ تعریف کی ہے کہ اگر اوسکے ایک طرف پر آنکھہ رکہی جائے تو وہ نظر نہ آئے اور علے ہذ القیاس سطح مستوی کی تعریف کی ہے کہ اگر اوسکے ایک طرف پر آنکھہ لگائی جائے تو ساری سطح آنکھہ سے چھپ جائے تو بتاؤ ان تعریفون مین کیا خرابی ہے فقط

تمام ہوا مقالہ اول

حواشی مقالہ دوم

مقالہ اول مین عموماً مقادیر متصلہ متجانسہ خطوط و زوایا و سطوح کا اور خصوصاً مثلثون اور
متوازی الاضلاعون کا باہم مقابلہ اسطرح کیا گیا ہے جس سے اونکا باہم مساوی یا غیر مساوی ہونا ظاہر ہوا
مقالہ دوم مین خواص متوازی الاضلاع قائم الزوایا کی ثابت کئے گئے ہین مگر اونمین اونکی مقدار
سے کچھہ بحث نہین ہے اور ۴۷ ش ا م کو توسیع دی ہے یعنی مثلث حادۃ الزوایا اور منفرج الزاویہ
کا بیان اوسی قسم کا کیا ہے جسطرح کا قائم الزاویہ کا بیان ۴۷ ش مین ہوا اقلیدس نے کچھہ تعریف
قائم الزوایا متوازی الاضلاع کی نہین بیان کی شاید اس شکل کا نام یونانی مین ایسا تھا کہ اوس سے
مفہوم وہی ہوتا تھا جو تعریف سے ہوتا قائم الزوایا متوازی الاضلاع اوس متوازی الاضلاع کو
کہتے ہین جسکا ایک زاویہ قائمہ ہو اور اکثر ہم متوازی الاضلاع کو اوڑا کر فقط قائم الزوایا کہتے ہین
اور اوس سے ہی متوازی الاضلاع قائم الزوایا ہم سمجھتے ہین مربع قائم الزوایا ہے جسکے ضلعے اسمین
برابر ہین - اقلیدس مین اونہین مربعون سے بحث ہوتی ہے جو خطوط مستقیم پر بنائین یا اونکو خطون پر بنا ہوا
خیال کرین مربع خط اب پر جو بنائین اوسکو اختصاراً مربع اب پر یا مربع اب کا کہتے ہین
۳۵ ش ا م مین ثابت ہوا ہے کہ ایک ہی قاعدہ پر درمیان ایک ہی خطوط متوازیہ کے بے شمار
متوازی الاضلاعین ہوسکتی ہین جنکے رقبے اسمین برابر ہون لیکن اون مین قائم الزوایا
ایک ہی متوازی الاضلاع ہوگی جسکے زاوئے قائمے ہون لیکن اوسکے ضلعون کا مجموعہ
بہ نسبت اور متوازی الاضلاعون کے مجموعہ اضلاع کے جو اوسی قاعدہ پر درمیان اونہین خطوط

متوازیہ کے واقع ہون نہایت کم ہوگا پس اس سے معلوم ہوا کہ اس قائم الزوایا متوازی الاضلاع کا رقبہ فقط اون دو ضلعون سے جو زاویہ قائمہ کے محیط ہین متعین ہو سکتا ہے اسواسطے مقالۂ دوم کی پہلی حد مین یہہ بیان کیا گیا ہے کہ ہر متوازی الاضلاع قائم الزوایا کو سطح اون دو ضلعون کے کہتے ہین جو زاویہ قائمہ کے محیط ہین

مقالۂ دوم مین مفادیہ کے متساوی اور مترادف ہونیمین کچھہ تمیز نہین کی گئی ہے دیکھہ لو کہ ایک قائم الزوایا کو سطح اون دونون خطون کی کہتے ہین جو اوسکے زاویہ قائمہ کے دو ضلاع محیط کے برابر ہین اور یون قائم الزوایا کہنا اور سطح دو ضلاع محیط قائمہ کی کہنے ایک ہی بات ہے

اس بات کو ہمیشہ خیال مین رکہنا چاہیے کہ سطح قائم الزوایا کی چار خطوط مستقیم محیط ہوتے ہین ابتدا مین یہہ ایک بڑی بات ہی کہ مفہومات ہندسیہ اور مفہومات حسابیہ یا جبریہ مین تمیز کیجائے علم ہندسہ کا موضوع مقدار متصلہ ہے اوسکا موضوع عدد نہین ہے اسلئے قائم الزوایا کو کوئی جملہ جبریہ یا حسابیہ تعبیر کرنیوالا براہین ہندسہ مین مقرر کرنا دلائل صادقہ سے انحراف کرنا ہے لیکن یہہ بات بہی نہایت ضروری ہے عدد اور مقدار متصلہ مین جو تعلقات باہم ہین اونکو وہان تک سمجہین اور جہان تک کہ وہ خطوط اور سطوح کو تعبیر کرتے ہین

تمام خطوط طول سے بنتے ہین اور تمام سطوح سطوح سے ایک خاص طول کے خط کو متعین کرکے اوسکا نام پیمانہ واحد رکہتے ہین اور پہر اور خطون کے طولون کو اس پیمانہ واحد کی تعداد سے تعبیر کرتے ہین اور کہتے ہین کہ اس خط مین اتنے پیمانے واحد خطی شامل ہین اور سطوح کے ناپنے کے لئے مربع کی شکل مقرر کی گئی ہے اس مربع کا طول ایک پیمانہ واحد خطی کے برابر ہوتا ہے اور اوسی سے سب سطحون کی مقدار بتلائی جاتی ہے کہ اتنے پیمانہ واحد مربعے اوسمین شامل ہین یہہ بات یاد رکہنے چاہیے کہ مقالۂ دوم اقلیدس مین جو خواص قائم الزوایا اور مربع کی ثابت کئے ہوے ہین اونکو کچھہ تعلق اس بات سے نہین ہے کہ اضلاع اونکے کسی پیمانہ واحد خطی کے اضعاف سی تعبیر ہو دین۔

ہان اگر قائم الزوایا کے اضلاع ایسے پورے حصون مین تقسیم ہوجائین جنمین سے ہر ایک برابر پیمانہ واحد

خطی کے ہوتو اعداد رقبہ کو تعبیر کرنیوالے نکل سکتے ہین

دو خطوط مستقیم پر جو ایک دوسرے کی ساتھہ زاویہ قائمہ بناتے ہین اب برابر ۴ کے اور اد برابر ۳ پیمانہ واحد خطی کے ناپ کر قطع کرو اور قائم الزوایا

اب س د کو پورا بناؤ اور اب اور اد کے نقاط

تقسیم سے ی ل اور ف م اور ح ن متوازی اد کے

اور ہ ع اور ک ق متوازی اب کے نکالو

تو قائم الزوایا اس برابر مربعون مین تقسیم ہوگئے

اور بحکم (اش ۲م) کے مجموعہ سطوح قائم الزوایا ال اور ی م اور ف ن اور ح س کا برابر ہے اس کے

اور بحکم (۳۶ ش ا م) کے یہہ قائم الزوایا سطوح آپسمین بھی برابر ہین

اسواسطے ان سطحون مین سے کسی ایک سطح ال سے اس چوچند ہے

اور پھر ال برابر ہے سطوح قائم الزوایا ی ہ اور ہ ر اور ر د کے اور اون مین سے سب کے خطوط

متساویہ اہ اور ہ ک اور ک د پر بنائے گئے ہین

اسواسطے قائم الزوایا ال سہ چند مربع اہ سے ہوئے

اسواسطی قائم الزوایا اس ۴×۳ گنی مربع اہ سے یعنی ۱۲ مربع پیمانہ واحد کے برابر ہوئے یعنے

حاصلضرب اون دو عددون کا جو اضلاع قائم الزوایا کو تعبیر کرتے ہین اون مربع پیمانہ واحد

کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے جو اس قائم الزوایا مین ہین

پس اس طرح سے رقبہ تعبیر کرنیوالے اعداد حاصل ہوگئے

اور اگر اب اور اد مین بجائے ۴ و ۳ کے ط و ص پیمانہ واحد خطی ہون تو اسیطرح ثابت ہوگا کہ

قائم الزوایا اس کے رقبہ مین ط ص مربع پیمانہ واحد خطی ہونگے پس اس سبب سے ط ص نہایت

مناسب تعبیر کرنیوالا رقبہ قائم الزوایا اس کا ہوگا

اب اسسے یہہ معلوم ہوا کہ علم ہندسہ مین قائم الزوایا کے معنی اور حساب و جبر مقابلہ مین حاصلضرب کے معنی

باہم مشابہت تامہ رکہتے ہین اور قائم الزوایا کے رقبون مین مقابلہ او سیطح ہو سکتا ہے
جسطح اون اعداد کے حاصل ضربون مین جو اضلاع قائم الزوایا کو تعبیر کرتے ہین

پس اسی سبب سے مسائل ہندسیہ کا اثبات دلائل جبریہ اور حسابیہ پر مبنی ہوتا ہے

اگر دو ضلعے قائم الزوایلکے آپسمین برابر ہون یا ط برابر ص کے ہو تو شکل مربع ہوگی اور رقبہ اوسکا
ط ط یا ط² سے تعبیر ہوگا

چونکہ مثلث اور متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ اور ارتفاع رکہتے ہین او نمین مثلث نصف
متوازی الاضلاع کا ہوتا ہے اسواسطے مثلث کا رقبہ نصف اوس قائم الزوایا سے تعبیر ہوگا جو
مثلث کے برابر قاعدہ اور ارتفاع رکہتی ہے یا اسے یون بیان کرو کہ اگر قاعدہ مین ط پیمانہ واحد
اور ارتفاع مین ص پیمانہ واحد ہون تو مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ط ص سے تعبیر ہوگا

مقالہ دوم کی جو آٹہہ شکلین اول کی ہین وہ سب اس علوم متعارفہ کی مثالین ہین کہ کل اپنے
سب اجزاء کے مجموعہ کی برابر ہوتا ہے دیکہہ لو کہ ہر یک شکل کا رقبہ برابر اپنے سب اجزاء کے
مجموعہ کے برابر بیان کیا گیا ہے

(حد ۲) متوازی الاضلاع ا ب س د کے کسی قطر ب د مین کوئی نقطہ ف مقرر کر کے دو خطوط
مستقیم ی ف ح اور ہ ف ک متوازی الاضلاع شکل کے کہینچین تو یہہ خطوط چار متوازی الاضلاعون
مین اوس متوازی الاضلاع کو تقسیم کرین گے دو متوازی الاضلاعون کو جن مین قطر
متوازی الاضلاع کا گذرتا ہے گرد قطر متوازی الاضلاع کے کہتے ہین اور دو متوازی الاضلاع
ی ک اور ہ ح کو متمم متوازی الاضلاع جو گرد قطر کے واقع ہین کہتے ہین اور ہر ایک سطح
متوازی الاضلاع جو گرد قطر کے واقع ہے مع دو متمموں کے علم کہلاتی ہے مثلاً
متوازی الاضلاع ی ک مع دو متممون ا ف اور ف س کے علم ہے اور ایسے
ہی متوازی الاضلاع ہ ح بہی مع انہین دو متممون کے علم ہے اور اگر دوسرا قطر
ا س کہینچا جائے تو دو اور علم کسی نقطہ سے اوس کے متوازی کہینچنے سے پیدا ہو جاینگے

پہلی شکل بجائے اس کہنے کے کہ قائم الزوایا جو آب اور ب س آ ی بنی ہی ہم یہہ کہا کرتے ہین کہ سطح اب اور ب س کی یا سطح اب س اس شکل کا یہہ نتیجہ بہی اور زیادہ ہوسکتا ہے کہ اگر دو خطوط مستقیم کئی حصو نمین تقسیم کیے جائین تو سطح دونون خطون کی برابر ہوگی باہم اونکے حصون کی سطح کے

اقلیدس نے کوئی پیمانہ خطوط اور سطوح کی پیمائش کے لیے نہین مقرر کیا اسلیے مقالہ دوم مین اقلیدس کے قائم الزوایا کی مفہومات بالکل جدا اس بات سی ہین جو ہم نے بیان کیے کہ قائم الزوایا کی خود تک استدلال عداد کے حاصلضرب سے کرین اور یہہ کہین کہ حاصلضرب تعبیر کرتا ہی اون احاد مربع پیمانہ واحد کو جو سطوح قائم الزوایا کے رقبون مین موجود ہین

شکل اول مین اشکال ب ہ اور ب ک اور د ل قائم الزوایا ہین اور یہہ آسانی سی ثابت ہوسکتی ہین اسواسطی کہ متوازی ہونیکے سبب سے زاوئے س ی ل اور ی د ک آپسمین برابر ہین اور بحکم (۲۹ ش ا م) کے زاویہ ی د ک برابر ہے زاویہ ب ج س کے لیکن زاویہ ب ج ق قائمہ ہے پس اشکال ب ہ اور ب ک اور د ل اور ی ہ مین سی ہر ایک کے زاویون مین سے ایک زاویہ قائمہ ہے اور اسیواسطی بحکم (۴۶ ش ا م) کے ان شکلون مین سے ہر ایک شکل قائم الزوایا ہے

اثبات جبریہ

فرض کرو کہ ب س مین پیمانہ واحد خطی ط ہین اور خط ا مین ص پیمانہ واحد خطی ہین اور ب د اور د ی اور ی س مین م اور ن اور ع پیمانہ واحد ہین تو

$$ط = م + ن + ع$$

ان مساویون کو ص مین ضرب دو نو ص ط = ص م + ص ن + ص ع

یعنی حاصلضرب دو عددون کا جنمین سے ایک کتنی ایک حصو نمین تقسیم ہوا ہی برابر ہوتا ہے مجموعہ حاصل ضربون عدد غیر منقسم اور عدد منقسم حصون کے

اور اگر حاصل ضرب کی معنی بموجب علم ہندسیہ کے لین

تو اس ط ص مین جو مربعے پیمانہ واحد مین وہ برابر ہین مجموعہ مربعون پیمانہ واحد کے جو ص م و ص ن و ص ع مین ہین

شکل جس طرح جبر مقابلہ کے طور پر بیان کی گئی حساب کے طور پر بہی بیان ہوسکتی ہے

اگر ط برابر ۱۲ پیمانہ واحد کی ہو اور ص برابر ۵ پیمانہ واحد کی ہو اور م و ن و ع برابر ۶ و ۴ و ۲ پیمانہ واحد کے ہو تو ۱۲ = ۶ + ۴ + ۲

ان مساویون کو ۵ مین ضرب دو تو

$$12 \times 5 = 5 \times (6 + 4 + 2)$$

$$\therefore 12 \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5 + 2 \times 5$$

اور سطح اور شکلین بہی ثابت ہوسکتی ہین جملہا جبریہ مین جو خطوط کو تعبیر کرتے ہین کچہہ اعداد فرض کرلین

اثبات جبریہ شکل دوم

فرض کرو کہ اب مین ط پیمانہ واحد خطی ہین اور اس اور س ب مین م اور ن پیمانہ واحد تو

م + ن = ط

مساویون کو ط مین ضرب دو ط م + ط ن = ط²

یعنے اگر ایک عدد دو حصون مین تقسیم کیا جائے تو کل عدد کا مربع برابر ہوگا کل عدد اور ہر ایک حصہ کے حاصل ضربون کے

شکل ۳ - اوسمین ب س حصہ لیا ہی دوسرا حصہ اس ہی لیا جا سکتا ہے اور پہلے طرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ سطح اب اور اس کے برابر ہے سطح اس اور س ب مع مربع اس کے

اثبات جبریہ شکل ۳

فرض کرو کہ اب مین ط پیمانہ واحد ہین اور ب س مین م اور اس مین ن تو

ا = م + ن

ان مساویون کو م مین ضرب دو تو م ا = م² + م ن

اگر ایک عدد دو حصون مین تقسیم کیا جائے تو حاصل ضرب کل عدد اور ایک حصہ کا برابر ہوگا دونون حصون کے حاصل ضرب اور مربع حصہ مذکور کے

شکل دوم و سوم

شکل اول کی خاص صورتین ہین اور اونکا بیان شکل اول کے بیان مین ضمناً ہوگیا ہے شکل چہارم دو اوپر کی شکلون سے اگرچہ یہہ شکل مستنبط ہوسکتی ہے لیکن اقلیدس نے سارے مقالہ کی اثبات مین اس ترکیب کو ترجیح دی کہ سطوح جبکا مقابلہ کیا جائے اونکی مساوات ظاہر کرے ۴۶ ش ا م کے نتیجہ مین بیان ہوا ہے کہ جس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو اوسکے سب زاوئے قائمے ہونگے ۴۶ ش کے اس حکم کو اگر اثبات مین کام مین لائین تو نہایت اختصار اثبات مین ہو جاتا ہے

اگر دونون حصے خط کی برابر ہون تو کل خط کا مربع برابر ہوگا چوچند مربع نصف خط کے

اگر ایک خط تین حصو مین تقسیم کیا جاے تو مربع کل خط کا برابر ہوگا مربع تینون حصون مع دو چند سطح ہر ایک دو حصون کے کلیہ یہہ ہی کہ اگر ایک خط کتنے حصون مین تقسیم کیا جائے تو کل خط کا مربع برابر ہوگا سب حصون کے مربعون مع دو چند سطح ہر ایک دو حصون کے

ثبوت جبریہ شکل ۴

فرض کرو کہ اب مین ط پیمانہ واحد ہون اور حصص اس اور ب س مین م اور ن ہون

ط = م + ن

ان مساویون کا مجذور کرو ط² = م² + ۲ م ن + ن²

اگر ایک عدد دو حصو مین تقسیم کیا جائے تو مربع کل عدد کا برابر ہوگا مربعے دونون حصون مع دو چند سطح دونون حصون کے — (۴ ش ۲ م) اقلیدس سے (۲ ش ۲ م) اس طرح ثابت ہوسکتی ہے

شکل مین دل کو دی پر اور ی م کو ی ب پر برابر ب س کے بناؤ اور ملاؤ س ہ اور ہ ل اور س ل م اور م س تو شکل ہ ل م س ایک مربع ہے

اور چار مثلث س اہ اور ہ دل اور ل ی ب اور م ب س آپسمین برابر ہین

اور ملکر قایم الزوایا اح اور ح ی کے برابر ہین

پس اح اور ح ی اور ف ہ اور س ک ملکر برابر ہین ا دی ب کے

اور شکل ہ ل م س مع چار مثلثون س اہ اور ہ دل اور ل ی ب اور م ب س کے

کل شکل ا دی ب بناتی ہین

تو اح اور ح ی اور ف ہ اور س ک ملکر برابر ہین ہ ل م س مع چار مثلثون کے

لیکن اح اور ح ی برابر ہین چار مثلثون کے

اسیو اسطی ف ہ اور س ک برابر ہین ہ ل م س کے

یعنے مربعے ا س اور اہ کے برابر ہین س ہ کے مربع کے

شکل پنجم - اگر ایک خط دو برابر حصونمین تقسیم یعنی تنصیف کیاجائے تو سطح دونون حصون کی نہایت زیادہ اور مجموعہ مربع دونون حصون کا ملکر نہایت کم ہوتا ہے

شکل کے دیکھنے سے یہہ نتیجہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے

یہہ بات یاد رکہنی چاہیے کہ علم ہندسہ مین دو خطوط مستقیم کے مجموعہ سے مراد وہ خط مستقیم ہوتا ہے جو اون دونون خطون کے اس طرح ملانیسے کہ وہ ایک سیدہ مین ہوجائین پیدا ہوتا ہے

ایک خط کی مساوی اور غیر مساوی حصونمین تقسیم ہونے کے باب مین یہہ خواص اونکی قابل یاد کرنے کے ہین

اول چونکہ اب = ۲ ب س = ۲ (ب د + د س) = ۲ ب د + ۲ د س (۵ ش ۲ م)

اب = اد + دب

∴ ۲ س د + ۲ ب د = اد + دب

ان مساویونمین سے ب د کو تفریق کرو تو ۲ س د = اد - ب د

اور س د = ½ (اد - ب د)

اسسے یہہ ثابت ہوا کہ اگر ایک خط مستقیم اب دو مساوی حصون مین نقطہ س پر اور دو
غیر مساوی حصون مین نقطہ د پر تقسیم کیا جاے تو خط کا حصہ س د جو درمیان نقاط
تقسیم کے واقع ہے برابر ہوگا نصف فرق غیر مساوی حصون کے

دوم اد = اس + س د مجموعہ دونو غیر مساوی حصون کے (۵ ش ۱م ۱)

ب د = اس + س د اونکے حاصل تفریق کے

ان مساویون کے جمع کرنیسے اد + دب = ۲ اس

یعنی مجموعہ اور فرق دو خطوط اس اور س د کا برابر ہے دوچند بڑے خط کے
اور نصف بھی ان مساویون کے مساوی ہونگے ∴ ½ اد + ½ دب = اس
یعنے نصف مجموعہ دو غیر مساوی خطوط اس اور س د کا اونکے نصف فرق پر
زیادہ کیا گیا برابر بڑے خط اس کے ہے

سوم چونکہ اد = اس + س د اور دب = اس - س د

ان مساویون کے تفریق کرنے سے اد - دب = ۲ س د

یعنے دو مساوی خطون کے مجموعہ اور فرق کا تفاوت برابر ہوتا ہے دوچند چھوٹے خط کے
اور ان مساویون کے نصف بھی مساوی ہین ∴ ½ اد - ½ دب = س د
یعنے دو خطون کا نصف فرق اونکے نصف مجموعہ مین سے تفریق کیا گیا برابر ہوتا ہی
اون دو خطون مین سے چھوٹے خط کے

چہارم چونکہ اس - س د = دب حاصل تفریق کے

∴ اس = دب + س د

ان مساویون مین سے ہر ایک پر س د چھوٹے خط کے زیادہ کرنے سے

اس + س د = دب + ۲ س د

یعنے مجموعہ دو غیر مساوی خطوط کا برابر ہے دوچند چھوٹے خط مع فرق دونون خطوط کے

شکل پنجم مین سطح ا د اور د ب کی اور مربع ب س کا ایک ہی احاطہ سے محدود ہین لیکن جو سطحین گہری ہین اونمین فرق بقدر مربع س د کے ہے

اگر یہہ خیال کرین کہ ا س اور س د نصف مجموعہ اور نصف فرق ہین دو خطون ا د اور د ب کا

تو نتیجہ اس شکل سے یہہ نکلیگا کہ سطح دو خطون کی برابر ہوتی ہے اونکے نصف مجموعہ اور نصف فرق کے مربعون کے تفاوت کے

اثبات جبریہ شکل ۵

فرض کرو کہ ا ب مین ۲ط پیمانہ واحد خطی

تو اوسکے نصف ب س مین ط پیمانہ واحد خطی

اور س د مین جو درمیان نقاط تقسیم کے واقع ہوا ہے م پیمانہ واحد خطی ہونگے

اور غیر مساوی خطون مین سے بڑے حصہ ا د مین ط + م پیمانہ واحد خطی ہونگے

اور چھوٹے حصہ د ب مین ط - م

اور نصف فرق ط + م اور ط - م کا ہے ∴ $(ط + م)(ط - م) = ط^2 - م^2$

ان مساویون مین سے ہر ایک پر $م^2$ زیادہ کرو تو $(ط + م)(ط - م) + م^2 = ط^2$

یعنے اگر ایک عدد دو مساوی اور دو غیر مساوی حصون مین تقسیم کیا جائے تو حاصل ضرب دو غیر مساوی حصون کا مع مربع نصف فرق کے برابر ہوگا نصف عدد کے مربع کے

شکل ششم ایک خط مستقیم کو خارج کیا گیا یا ممدودہ جب کہتے ہین کہ اوسکا طول کسی سمت مین زیادہ کیا جائے اور جتنا طول یہہ زیادہ ہوتا ہے اوسے حصہ خارج شدہ یا ممدودہ کہتے ہین

اگر ایک خط کے اندر نقطہ متعین کرین تو اوسکو تقسیم داخلی کہتے ہین اور فاصلہ جو اس نقطہ سے اطراف خط کا ہوتا ہے اوسے داخلی حصے کہتے ہین اور جب نقطہ خط ممدودہ مین مقرر کیا جائے تو اوسکو تقسیم خارجی کہتے ہین اور فاصلہ جو اس نقطہ کا اطراف خط سے ہوتا ہے اوسے خارجی حصے کہتے ہین شکل پنجم و ششم اور شکل نہم و دہم ایک ہی ہو جاینگے

اگر اس تقسیم داخلی اور خارجی کو ملحوظ رکہین

اثبات جبریہ شکل

فرض کرو کہ اب مین ۲ط پیمانہ واحد خطی ہون تو اوسکے نصف ب س مین ط پیمانہ واحد خطی ہونگے اور ب د مین م پیمانہ واحد خطی تو اب مین ۲ط + م پیمانہ واحد خطی ہونگے اور

∴ (۲ط + م) م = ۲ط م + م² ان مساویون مین سے ہر ایک پر ط² زیادہ کرو تو

(۲ط + م) م + ط² = ط² + ۲ط م + م²

لیکن ط² + ۲ط م + م² = (ط + م)²

∴ (۲ط + م) م + ط² = (ط + م)²

یعنی اگر ایک عدد دو برابر حصون مین تقسیم کیا جائے اور ایک عدد کل پر اور ایک نصف پر زیادہ کیا جائے تو حاصل ضرب کل عدد کا جو اسطرح زیادہ کرنے سے بنا ہے اور زیادہ کئے ہوئے عدد کا مع مربع نصف عدد کے برابر ہوگا اوس عدد کے مربع کے جو نصف عدد اور زیادہ کئے ہوئے عدد سے ملکر بنتا ہے

اشکال پنجم اور ششم کے جو نتائج جبریہ بیان ہوئے ہین وہ مترادف ہین یہہ بات ظاہر ہے کہ ط + م اور ط - م کا شکل پنجم مین اور ۲ط + م اور م کا شکل ششم مین فرق ایک ہی ہے اور ایک ہی جملہ جبریہ مطلب دونون کا ادا کرتا ہے

یہہ بات اسطرح پیدا ہوتی ہے کہ جب دو غیر مساوی خطوط ایک سمت مین ہون تو اونکے فرق بیان کرنیکے علم ہندسہ مین دو طور ہین ایک طور شکل پنجم مین بیان ہوا ہے دوسرا طور شکل ششم مین شکل پنجم مین فرق ب د دو غیر مساوی خطوط اس اور س د کا اسطرح بیان کیا گیا ہے کہ چہوٹے خط س د کو خارج کرکے س ب کو برابر بڑے خط ا س کے بنایا تو د س اور س د کا فرق حصہ ممدودہ د ب ہے

اسواسطے کہ اس برابر ہے س ب کے اور ہر ایک مین سے س د کو نکالین
تو اس اور س د کا فرق برابر ہے س ب اور س د کے فرق کے
شکل ششم مین فرق د ب دو غیر مساوی خطوط س د اور س ا کا اسطرح بیان کیا گیا ہے
کہ بڑے خط س د مین سے ایک حصہ س ب برابر چھوٹے خط س ا کے بنا لیا ہے
شکل ہفتم اس اور س ب مین سے کوئی سا حصہ لین تو ہر طرح ہی دعوی صحیح ہے یعنی
اب اور اس کے مربعے برابر ہین دوچند سطح اب اور اس مع مربع ب س کے
اس شکل کے دعوی کو اسطرح بیان کرتے ہین کہ دو خطون کے فرق کا مربع برابر ہوتا ہے ان خطون کے
مربعون اور اونکے دوچند سطح کی تفاوت کی
دو خطون کے مجموعہ اور فرق کے مربعون کا تفاوت کے برابر ہوتا ہے ان خطون کے چوچند سطح کے

اثبات جبریہ شکل

فرض کرو کہ اب مین ط پیمانہ واحد خطی اور اوسکے حصص اس اور س ب مین م اور ن پیمانہ
واحد خطی ہین تو $ط = م + ن$ ان مساویونکو مربع کرو

$\therefore ط^2 = م^2 + 2من + ن^2$ ان مساویونمین سے ہر ایک پر $ن^2$ زیادہ کرو

$\therefore ط^2 + ن^2 = م^2 + 2من + 2ن^2$ لیکن

$2من + 2ن^2 = 2(م + ن)ن = 2طن$

$\therefore ط^2 + ن^2 = م^2 + 2طن$

پس اگر ایک عدد دو حصون مین تقسیم کیا جائے تو کل عدد کا مربع مع ایک حصہ کے مربع کے
برابر ہے دوچند حاصل ضرب کل عدد اور حصہ مذکور اور دوسرے حصہ کے مربع کے
شکل ہشتم شکل ہفتم کی طرح اس شکل مین بھی ہر ایک حصہ لیا جا سکتا ہے اور یہہ کہا جا سکتا ہے
کہ چوچند سطح اب اور اس کے مع مربع ب س کے برابر ہے مربع اوس خط مستقیم کے جو اب

اور اس سے ملکر بنا ہے

یہہ شکل (۴ ش ۷ ش ۲م) سے اسطرح مستنبط ہوسکتی ہے

دیکھو شکل ا بحکم (۴ ش ۲م) اد کا مربع برابر ہے اب اور ب د کے مربعون اور دو چند سطح اب اور ب د کے یا مربعون اب اور ب س اور دو چند سطح اب اور ب س کے اسواسطے کہ ب س برابر ہے ب د کے اور بحکم (۷ ش ۲م) کے مربع اب اور ب س کے برابر ہین دو چند سطح اب اور ب س مع مربع اس کے

اسواسطے اد کا مربع برابر ہے چو چند سطح اب اور ب س مع مربع اس کے

اثبات جبریہ شکل ۸

فرض کرو کہ کل خط اب مین ط پیمانہ واحد خطی اور اوسکے حصون اس اور س ب مین م اور ن پیمانہ واحد خطی ہین

تو م + ن = ط اور ن کو ہر ایک مین سے تفریق کرو

تو م = ط - ن ان مساویون کا مربع کرو تو

م٘ = ط٘ - ۲ط ن + ن٘ ان مساویون پر ۴ ط ن زیادہ کرو تو

۴ ط ن + م٘ = ط٘ + ۲ط ن + ن٘

لیکن ط٘ + ۲ط ن + ن٘ = (ط + ن)^۲

∴ ۴ ط ن + م٘ = (ط + ن)^۲

یعنی اگر ایک عدد دو حصو مین تقسیم کیا جائے تو چوچند حاصلضرب کل عدد اور کسی ایک حصہ کا مع مربع دوسرے حصہ کے برابر ہوگا اس عدد کے مربع کے جو کل عدد اور حصہ مذکور سے بنتا ہے

اٹھوین شکل اس صورت سے بھی بیان ہوسکتی ہے کہ دو خطون کے مجموعہ کا مربع اونکے فرق کے مربع سے بقدر چو چند سطح دو خطون کے زیادہ ہوتا ہے

شکل نہم ہہ ش ۹و ۷ ش ۲م سے استنباط شکل نہم کا ہوسکتا ہے

اسواسطے کہ بحکم (۴ ش ۲م) ا د کا مربع برابر ہے ا س اور س د کے مربعون اور دوچند سطح
ا س اور س د کے مربع د ب کو ہر ایک پر زیادہ کرو تو مربعے ا د اور د ب کے برابر ہونگے
ا س اور س د کے مربعون اور دوچند سطح ا س اور س د اور مربع د ب کے
یا مربعات ب س اور س د اور دوچند سطح ب س اور س د اور مربع د ب کے
اسواسطے کہ ب س برابر ہے ا س کے

لیکن بحکم (۷ ش ۲م) کے ب س اور س د کے مربعے برابر ہین دوچند سطح ب س اور س د
اور مربع د ب کے

پس اسلیئے ا د اور د ب کے مربعے برابر ہوئے دوچند مربعون ب س اور س د کے
(شکل ۹ کو دیکھو) اس شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ ا س اور س د کے مجموعہ کا مربع
اور اونکے فرق د ب کا مربع ملکر دوچند ہین ا س اور س د کے مربعون سے

اثبات جبریہ شکل ۹

فرض کرو کہ ا ب مین ۲ط پیمانہ واحد خطی ہین تو اون کے نصف ا س یا س ب مین
ط پیمانہ واحد خطی ہونگے

اور یہہ بھی فرض کرو کہ نقاط تقسیم کے درمیان جو خط س د ہے اوسمین م پیمانہ واحد خطی ہین
تو دو غیر مساوی حصون مین سے بڑے حصہ ا د مین ط + م پیمانہ واحد خطی ہونگے
اور چھوٹے حصہ د ب مین ط - م

$$\therefore (ط+م)^2 = ط^2 + 2طم + م^2$$

$$(ط-م)^2 = ط^2 - 2طم + م^2$$ ان مساویون کو جمع کرو

$$\therefore (ط+م)^2 + (ط-م)^2 = 2ط^2 + 2م^2$$

یعنی اگر ایک عدد دو مساوی اور دو غیر مساوی حصون مین تقسیم کیا جائے تو مجموعہ ان دونون
غیر مساوی حصون کے مربعون کا برابر ہوگا دوچند مربع نصف عدد اور دوچند مربع نصف فاصلہ تقسیم

اون غیر مساوی حصون کے

دسوین شکل بہہ شکل بہی نوین شکل کی طرح سے ۴ و ۷ ش ۲م سے ثابت ہوسکتی ہے

اثبات جبریہ شکل ا

فرض کرو کہ خط اب مین ۲ط پیمانہ واحد خطی ہین تو اوسکے نصف اس یا س ب مین ط
پیمانہ واحد خطی ہونگے

اور فرض کرو کہ ب د مین م پیمانہ واحد خطی ہین

تو کل خط اور حصہ خارج مین ۲ط + م پیمانہ واحد خطی ہونگے

$$\therefore (۲\text{ط} + \text{م})^2 = ۴\text{ط}^2 + ۴\text{طم} + \text{م}^2$$

م^2 ان مساویون مین سے ہر ایک پر زیادہ کرو تو

$$(۲\text{ط} + \text{م})^2 + \text{م}^2 = ۴\text{ط}^2 + ۴\text{طم} + ۲\text{م}^2$$

اور $(\text{ط} + \text{م})^2 = \text{ط}^2 + ۲\text{طم} + \text{م}^2$

ان مساویون مین سے ہر ایک پر ط^2 زیادہ کرو تو

$$(\text{ط} + \text{م})^2 + \text{ط}^2 = ۲\text{ط}^2 + ۲\text{طم} + \text{م}^2$$

ان مساویون کے دوچند کرنے سے

$$۲(\text{ط} + \text{م})^2 + ۲\text{ط}^2 = ۴\text{ط}^2 + ۴\text{طم} + ۲\text{م}^2$$

لیکن $(۲\text{ط} + \text{م})^2 + \text{م}^2 = ۴\text{ط}^2 + ۴\text{طم} + ۲\text{م}^2$

پس $\therefore (۲\text{ط} + \text{م})^2 + \text{م}^2 = ۲(\text{ط} + \text{م})^2 + ۲\text{ط}^2$

یعنی اگر ایک عدد دو برابر حصون مین تقسیم کیا جائے اور کل عدد پر اور کسی ایک نصف پر ایک
عدد زیادہ کیا جائے تو مربع کل عدد کا جو سطح زیادہ ہوکر بنا ہے اور مربع اوس عدد کا جو
زیادہ کیا گیا ہے دونون ملکر برابر ہونگے دوچند مربع نصف عدد اور نصف مع عدد
زائد کے مربعون کے

جملہا جبریہ شکل نہم اور دہم مین اسیطرح متحد ہین جسطرح شکل پنجم و ششم مین تہی اون مین دو خطون کے فرق کو دو طرح بیان کیا گیا ہے

اور ان دونون شکلون کے دعوی اس ایک دعوی مین بیان ہو سکتے ہین کہ دو خطوط کی مجموعہ کا مربع مع اون دونون خطوط کے فرق کے مربع کے برابر ہوتا ہے مجموعہ مربع ان دونون خطون کے

شکل یازدہم اس شکل کے بنا مین یہہ سوال حل ہو جاتا ہے کہ ایک خط مستقیم کو اتنا زیادہ کرو کہ سطح کل خط مع زیادتی کے فقط زیادتی مین برابر اصلی خط کے مربع کے ہو اسو اسطی کہ سطح س ف اور اف کے برابر ہے س ا یا اب کے مربع کے

اس شکل کے ذریعہ سے دو سلسلے خطوط کے ایسے دریافت ہو سکتے ہین کہ ایک متزائد اور دوسرا متناقص ہو اور اون خطون مین سے ہر ایک خط اسطرح تقسیم کیا گیا ہو جسطرح یہہ خط ہوتا ہے

اول سلسلہ متناقص اسطرح پیدا ہوتا ہے

(۱۱ ش ۲م) مین اب = اہ + ب ہ

اور چونکہ اب . ب ہ = اہ^2 ∴ (اہ + ب ہ) . ب ہ = اہ^2

∴ ب ہ^2 = اہ^2 − اہ . ب ہ = اہ . (اہ − ب ہ)

اگر ہ ا مین ہ ل برابر ب ہ کے قطع کرین تو

ہ ل^2 = اہ (اہ − ہ ل) یعنے اہ . ال = ہ ل^2

یعنی اہ نقطہ ل پر ایسا تقسیم ہوگیا کہ سطح کل خط اہ اور ایک حصہ کے برابر ہے دوسرے حصہ ہ ل کے مربع کے

اور علے ہذا القیاس اسیطرح عمل کرنے سے ہ ل بہی تقسیم ہو سکتا ہے اگر خط منقسم کے بڑی حصہ مین سے چہوٹے حصہ کے برابر قطع کرین تو بڑا حصہ کل خط کی طرح تقسیم ہو جائیگا اور یہی درجہ بدرجہ عمل کرنے سے ایک سلسلہ متناقص پیدا ہو جائیگا

دوم سلسلہ متزائد سطرح پیدا ہوتا ہے

یہہ بات شکل سے ہویدا ہے کہ س ف و ف ا = س ا²

پس اس سے معلوم ہوا کہ س ف نقطہ ا پر بسبب افزائش حصہ کلان خط معلوم اس باوب کی

اسیطرح تقسیم ہوا ہے جسطرح کہ اب نقطہ ہ پر تقسیم ہوا ہے

پس اسطرح متواتر خط آخیر ہر خط منقسم کے بڑے حصہ کو زیادہ کرنیسے سلسلہ مقادیر متزائد خطوط

کا پیدا ہو جائیگا جنمین سے ہر ایک مثل اب کے تقسیم ہوا ہوگا

اس شکل سے یہہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ کل خط اور چھوٹے حصہ کے مربعے ملکر برابر سہ چند مربع بڑے

حصہ کے ہوتے ہین یہہ اقلیدس کے ۱۳ مقالہ کی ۴ شکل ہے

اثبات جبریہ شکل ۱۱

اب مین نقطہ ہ ایسا دریافت کرنا ہے کہ سطح کل خط اب کے حصہ ہ ب مین برابر ہو

دوسرے حصہ اہ کے مربع کے

فرض کرو کہ خط اب مین ط پیمانہ واحد خطی ہین اور اوسکی حصہ نامعلوم مین لا پیمانہ واحد خطی ہین

تو دوسرے حصہ مین ط - لا پیمانہ واحد خطی ہونگے

اور ∵ ط (ط - لا) = لا² موجب شرط سوال کے

اور لا² + ط لا = ط² یہہ مساوات درجہ دوم کی ہے اسلیئے

$لا = \frac{-ط \pm ط\sqrt{5}}{2}$ ان قیمتون مین سے پہلی قیمت ق سے متعلق ہے

اسطرح سے کہ $لا = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ اب = اہ ایک حصہ کے

اور ط - لا = ط - اہ = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ اب = ہ ب دوسرے حصہ کے

یہہ ظاہر ہے کہ حصص اہ اور ہ ب اعداد اصم سے تعبیر ہونگے

مگر اونکی صحیح صحیح قیمت تقریباً اور تخمیناً جہانتک چاہین دریافت ہو سکتی ہی جسقدر صحت منظور ہو

اوسیقدر ۵ کا جذر اعشاریہ مین زیادہ مراتب تک دریافت کرین

اب اس دوسرے نتیجہ کے کہ لا = ط/۲ + ۱ . ط معنی بیان کیے جاتے ہیں

مساوات ط (ط - لا) = لا^۲ میں لا کے واسطے - لا لکھو تو ط (ط + لا) = لا^۲ کے ہوگا

اب اسکا مطلب عبارت میں اسطرح ادا ہوگا کہ سطح خط معلوم اور اس خط کی جو خط معلوم اور حصہ ممدودہ سے بنتا ہے برابر حصہ خارج شدہ کے مربع کے

اور یہہ سوال اسطرح بھی بیان ہوسکتا ہے کہ

دو خط ایسے دریافت کرو جو فرق معلوم رکھتے ہوں اور سطح ان کے فرق اور حصہ کے برابر ہو دوسرے حصے کے مربع کے

یہاں یہہ بیان کرنا بھی ضرور ہے کہ مساوات درجہ دوم علم ہندسہ میں (اشکال ہی سے تعبیر ہوتی ہے)

شکل دوازدہم ادمیں عمود ہر ایک زاویہ حادہ سے کھینچا جا سکتا ہے اقلیدس نے زاویہ حادہ اسے عمود نکالا ہے اور ب س خارج شدہ سے نقطہ د پر ملایا ہے دوسری یہہ صورت شکل کی نہیں لکھی کہ زاویہ حادہ ب سے عمود نکلتا اور ا د سے نقطہ ی پر ملتا

اثبات جبریہ شکل ۱۲

ہ ہشتم کو صحیح مان لیا ہے

فرض کرو ب س اور س ا اور ا ب میں ط وص وس پیمانہ واحد خطی ہیں اور ن د

اور د ا میں م د ن پیمانہ واحد خطی

تو ب د میں ط + م پیمانہ واحد ہونگے

اور سیو اسطے س^۲ = (ط + م)^۲ + ن^۲ بسبب مثلث ا ب د کے قائم الزوایا ہونے کے

اور ص^۲ = م^۲ + ن^۲ مثلث ا س د کے ایضاً

∴ س^۲ - ص^۲ = ط^۲ + ۲ ط م + م^۲ - م^۲ ایضاً

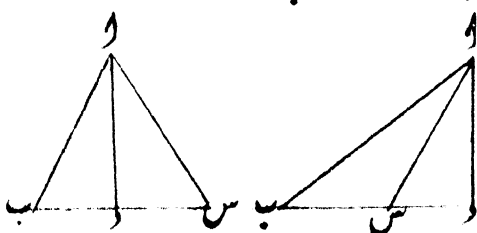
= ط^۲ + ۲ ط م

∴ س^۲ = ص^۲ + ط^۲ + ۲ ط م

یعنی س ا^۲ بہ نسبت ص ب^۲ + ط ا^۲ کے بقدر ۲ ط ا م کے زیادہ ہے

اگرچہ اقلیدس مین اس شکل سے بہت کام نہین پڑتا مگر علم مثلث مین بہت کام پڑتا ہے اوسکو ایک مناسبت و مشابہت ۴۷ ش ا م سے ہے اقلیدس نے ۴۷ ش ا م کا عکس ۴۸ ش ا م مین ثابت کیا مگر اسکا عکس فروگذاشت کیا اوسکو ہم ثابت کرتے ہین کہ اگر مثلث کی ایک ضلع پر مربع بنایا گیا بڑا باقی دو ضلعون کے مربعون سے ہو تو زاویہ پہلے ضلع کے مقابل کا منفرجہ ہوگا

ہو اسطے کہ اگر زاویہ منفرجہ نہوگا تو دو حال سے خالی نہین کیا قائمہ ہوگا یا حادہ اگر قائمہ ہے تو اوسکے سامنے کے ضلع کا مربع برابر ہوگا باقی دو ضلعون کے مربعون کے اور یہہ خلاف مفروض ہے اور اگر زاویہ حادہ ہے تو اوسکے سامنے کے ضلع کا مربع چھوٹا ہوگا باقی دو ضلعون کے مربعون سے اور یہہ بھی خلاف مفروض ہے پس اسی سے ثابت ہوا کہ زاویہ منفرجہ ہے

شکل سیزدہم - اقلیدس نے دعویٰ اسطرح لکھا ہے کہ مثلث حادۃ الزوایا مین الخ اور اسمین فقط صورت اول ثابت کی ہے لیکن سمسن صاحب نے اوسکو ہر مثلث کے لئے درست سمجھکر اوسکی تین صورتین بنائی ہین اونمین اول و دوم صورت نہایت مختصر طور پر اسطرح ثابت ہوتی ہے کہ فرضکرو ا ب س مثلث ہے جسکا ایک زاویہ ب حادہ ہے اوسکے حادہ زاویہ نہین ہے اگر اس عمود ب س پر نہین ہے تو ب س پر یا ضرورت ہو تو ب س ممدودہ پر عمود ا د مقابل کے زاویہ سے نکالو تو زاویہ ب کے مقابل کے ضلع اس کا مربع س ب اور ب ا کے مربعون سے بقدر دو چند سطح س ب اور ب د کے کم ہوگا

چونکہ ب س نقطہ د پر دو حصون مین تقسیم ہوا ہی تو بحکم ۷ ش ۲ م ہ کے س ب اور ب د کے مربعے ملکر برابر ہین دو چند سطح س ب اور ب د اور مربع س د کے
ان مساویون مین سے ہر ایک پر ا د کو زیادہ کرو

تو سں ب اور ب دا اور ا د کے مربعے ملکر برابر ہوئے دوچند سطح سں ب اور ب د مع مربعات سں دا اور ا د کے

لیکن بحکم (۴۷ ش ام) کے ب دا اور دا کے مربعے برابر ہین اب کے مربع کے اور ا د اور د سں کے مربعے برابر ہین ا سں کے مربع کے

پس اسواسطے مربعے سں ب اور ب ا کے برابر ہوئے دوچند سطح سں ب اور ب د مع مربع ا سں کے یعنی بنج

ثبوت جبریہ شکل ۱۲

فرض کرو کہ ب سں اور سں ا اور اب مین ط و ص و س پیمانہ واحد خطی ہین اور ب دا اور ا د مین م اور ن پیمانہ واحد ہین

صورت اول مین د سں مین ط - م پیمانہ واحد ہین

اسواسطے $س^2 = ن^2 + م^2$ بسبب مثلث اب د کے قائم الزاویہ ہونے کی

اور $ص^2 = ن^2 + (ط - م)^2$ بسبب مثلث ا د سں کی قائم الزاویہ ہونیکے

$\therefore س^2 - ص^2 = م^2 - (ط - م)^2$

$= م^2 - ط^2 + ۲طم - م^2$

$= - ط^2 + ۲طم$

$\therefore ط^2 + س^2 = ص^2 + ۲طم$

یا $ص^2 + ۲طم = ط^2 + س^2$

یعنی $ص^2$ بقدر ۲طم کے $ط^2 + س^2$ سے کم ہے

صورت دوم د سں = م - ط پیمانہ واحد کے

$\therefore س^2 = م^2 + ن^2$ بہ سبب اب د کے قائم الزاویہ ہونے کے

اور $ص^2 = (م - ط)^2 + ن^2$ بہ سبب ا سں د کے قائم الزاویہ ہونیکے

$$\therefore\ س^2 - ص^2 = م^2 - (م - ط)^2 = م^2 - م^2 + ۲طم - ط^2$$

$$= ۲طم - ط^2$$

$$\therefore\ ط^2 + س^2 = ص^2 + ۲طم$$

$$یا\ \ ص^2 + ۲طم = ط^2 + س^2$$

یعنی $ص^2$ بقدر ۲طم کے $ط^2 + س^2$ سے کم ہے

صورت سوم $\overline{م}$ برابر ہے $\overline{ط}$ کے

اور $ص^2 + ط^2 = س^2$ مثلث اب س کے قائم الزاویہ ہونے سے

ان مساویون مین سے ہریک پر $ط^2$ زیادہ کرو

تو $ص^2 + ۲ط^2 = س^2 + ط^2$ یعنی $ص^2$ بہ نسبت $س^2 + ط^2$ کے بقدر $۲ط^2$ یا ۲طط کے کم ہے

یہہ دو شکلین اور ۲۰ شکل مثلث قائم الزاویہ اور منفرجہ الزاویہ اور حادہ الزوایا کے اضلاع کے تعلقات کو بتلاتے ہین

خلاصہ علامات جبریہ کا جو علم ہندسہ مین مستعمل ہے

اہل یونان کے قدیم علم ہندسہ مین کسی علامت کا استعمال نہین تہا اس علم کی سب مطالب روزمرہ کی بول چال و شکلون مین ادا ہوتے ہے متاخرین نے جب جبر مقابلہ مین اعمال کے لئے علامتین اور بیانات کے لئے قاعدے اختصار کے مرتب کئے تو انکو علم ہندسہ مین بہی آسانی و اختصار کے لئے داخل کیا ۔ حصول علم ہندسہ مین علامات جبریہ کا استعمال اول ہیرو صاحب نے کیا اور وہ اپنی اقلیدس کے دیباچہ مین یہہ لکہتے ہین کہ ان علامتون کے داخل کرنے سے میری غرض یہہ ہے کہ اون لوگون کی آرزو اور تمنا پوری ہو جو زبان سے زیادہ علامتون مین براہین کے بیان کرنے کو پسند کرتے ہین تمام ریاضات مین خواہ وہ علم ہندسہ مین ہون یا کوئی اور علم ہو علامات جبریہ کام مین آتے ہین اسلئے ان علامتون کا مفصل بیان کرنا ضرور ہوا وہ الف بے تے اوس زبان کی ہے جو علامتون اور رمزون مین بولی جاتی ہے

علامت	سنہ ایجاد	موجد	کیفیت
=	۱۵۵۷	روبرٹ ری کورڈ	مساوات کی جگہ طول مین برابر یہہ دو خط متوازی نہایت
> و <	۱۶۳۱	طامس ہرٹ	یہہ غیر مساوی ہونیکی نشانیان ہین
+ و -	۱۵۴۴	مچل سٹائفل	مثبت و منفی کی نشانی
×	۱۶۳۱	اوٹ ریڈ	

قوت نماکو اعداد صحیح سے تعبیر کرنا سٹائفل کا ایجاد تہا اور اسکارٹس نے یہہ قاعدہ قوت نمایون کے لکہنے کا ایجاد کیا جو بالفعل مروج ہے اور جذر کی علامت کو بہی اسی مہندس نے نکالا ہے بیج گنت یعنی جبر مقابلہ مین ہندؤن کا یہہ طریقہ تہا کہ اعداد مین نسبت تبلانیکے لئے اوپر تلے اعداد لکہہ دیتے تہے بیچمین اونکے خط عرضی نہین لکہتے تہے یہہ خط عرضی لکہنا اہل عرب کا ایجاد ہے اور پہر اس طریقہ کو اٹلی والون نے اختیار کیا اور تمام یورپ مین یہی طریقہ مروج ہوا اور چونکہ اوسمین نہایت آسانی ہے اسلئے تمام مہندسین نے اسی علامت کو استعمال کیا اور اوٹ ریڈ نے اول نسبت کے بیان کرنے کے لئے نقطون کا ایجاد کیا اسطرح ط : ص : : س : د اس سے مراد یہہ ہے کہ ط کو ص سے وہ نسبت ہے جو س کو ہے د سے

سوالات مقالۂ دوم

(۱) مقدار جن جن معنی مین علم ہندسہ مین مستعمل ہے وہ بیان کرو اور مقالہ دوم مین جتنی قسم کی مقدارون کا بیان ہوا اونکو مفصل بیان کرو

(۲) کس سطح سے ایک متوازی الاضلاع قائم الزوایا پیدا ہوتی ہے۔ مقالہ دوم اقلیدس مین جو براہین بیان ہوئین اونمین کس سے وہ مفہوم ہوتی ہے

(۳) اقلیدس نے تعریف قائم الزوایا متوازی الاضلاع کی کیون نہین لکہی

(۴) علوم ہندسہ مین دو یا زیادہ خطوط کے مجموعہ سے کیا مراد ہوتی ہے

(۵) دو خطون کی سطح لکہنے مین اور قائم الزوایا کو ان دو خطون سے محدود کہنے مین کیا فرق ہے

(۶) علم کی تعریف کرو ایک ہی قائم الزوایا مین ایک ہی دفعہ شکل بنانے سے کتنے علم پیدا ہوتے ہین اور اونمین فرق بتلاؤ

(۷) اقلیدس کے مقالہ دوم کے آٹھون اول شکلین کس علوم متعارفہ پر مبنی ہین

(۸) مربعات متساویہ اور قائم الزوایا متساویہ مین سے کن کا انطباق ضروری ہے یعنے اوسکو جب ایک دوسرے پر پیان کرین تو وہ منطبق ہوجائین

(۹) ایک خط پر مربع اور ایک خط کا مربع ان مین کچھہ فرق ہے اور علم ہندسہ مین ان علامات اب٢ اور اب . ب س کے استعمال پر کیا اعتراض ہوئے ہین

(۱۰) مربع معلوم مین اوسکے کسی حصہ مثلاً نصف و ثلث وغیرہ کے برابر علم بن سکتا ہے

(۱۱) جب دو ضلعے قائم الزوایا کے اعداد متوافق ہین تو رقبہ قائم الزوایا کا اون احاد کے حاصلضرب سے جو اضلاع متصلہ کو تعبیر کرتے ہین تعبیر ہوگا اور اس مضمون کو اس صورت مین سمجھاؤ کہ اضلاع متصلہ ۳ و ۴ پیمانہ واحد ہون

اور اجزا ضربی کے پیمانہ واحد مین اور حاصلضرب کے پیمانہ واحد مین فرق بتلاؤ کہ کیا ہے

ثابت کرو قائم الزوایا کے اضلاع متصلہ مین ط و ص پیمانہ واحد مین اور انکا رقبہ ط ص ہے

اور یہہ ہی ثابت کرو کہ اگر اضلاع متصلہ ط/م و ص/ن پیمانہ واحد ہون تو رقبہ اوس کا ط ص/م ن ہوگا

(۱۲) براہین جبریہ یا حسابیہ باوجود مختصر ہونیکے مقالہ دوم کی شکلون کی اثبات مین کیون نہین استعمال کرتے

(۱۳) کس معنی کر مثلث کر رقبہ کو یہہ کہتے ہین کہ وہ برابر ہے قاعدہ اور ارتفاع کے نصف حاصلضرب کے اور یہہ نتیجہ کن دو شکلون سے مستنبط ہوا ہے

(۱۴) کسطرح ثابت کروگے کہ رقبہ معین کا برابر ہوتا ہی اپنے قطرون کے نصف حاصلضرب کے

(۱۵) جب دو ضلعے متصل کے متوازی الاضلاع کے معلوم ہون تو کسطرح اوسکے رقبہ کے

دریافت کرنیکے لئے قاعدہ کا استنباط کرسکتے ہین

(۱۶) رقبہ سطح منحرف کا جسکے دو ضلعے متوازی ہون برابر ہوتا ہے سطح ارتفاع اور نصف مجموعہ اضلاع متوازیہ کے اول ور دوم مقالون کی کن شکلون سے یہہ نتیجہ ثابت ہوتا ہے ۹ اوران کہیتون کی پیمایش مین جنکی مینڈین بالکل بے قاعدہ ہین اس قاعدہ سے کیا فائدہ ہے

(۱۷) ذوا ربعۃ الاضلاع کے رقبہ دریافت کرنیکا جو قاعدہ ہے کہ اوسکے دو مقابل کے زاویون مین وتر ملایا جائے اور دوسرے دو مقابل کے زاویون سے عمود نکال کر ان عمودونکے مجموعہ کو وتر مذکور مین ضرب دین اور حاصلضرب کا نصف لین تو بتاؤ وہ کس شکل سے مستنبط ہوا ہے

(۱۸) (۳ش ۲م) مین ثابت کرو کہ سطح کل خط اب اور کسی ایک حصہ اس یا ب س کے برابر ہے فرق مربعون ب س اور اس کے

(۱۹) اگر ایک خط مستقیم کتنے ہی حصون مین مین تقسیم کیا جائے تو کل خط کے مربع اور حصص کے مربعون کے مجموعہ مین فرق دو چند مجموعہ سطوح ہر ایک دو حصون کے ہوگا

(۲۰) (۴ش ۲م) کا ثبوت کس طرح مختصر ہوسکتا ہے ۹ ثبوت جبریہ لکھو اور یہہ بتلاؤ کہ یہہ ثبوت کن فرضیات پر مبنی ہے

(۲۱) ثابت کرو کہ (۲ و ۳ ش ۲م) سے (۴ش ۲م) کا ثبوت بغیر کسی شکل ہندسی کہینچے کے استنباط ہوسکتا ہے

(۲۲) اگر دو قسم باہم ملکر برابر مربعون کے ہون تو خط معلوم تنصیف ہوگا ۹

(۲۳) اگر ایک خط تثلیث کیا جائے تو برہان ہندسیہ سے ثابت کرو کہ کل خط کا مربع نوگنا تہائی خط کے مربع سے ہوگا

(۲۴) (۴ش ۲م) مین اگر خط اب کسی تین حصونمین تقسیم ہو تو دعویٰ اور ثبوت دونکو مثل شکل چہارم کے بیان کرو

(۲۵) ایک مربع معلوم مین دو علم سطح بتاؤ کہ مربع اندرونی نصف مربع معلوم کا ہو

(۲۶) (۴ش ۲م) سے (۷ش ۱م) کو ثابت کرو

(۲۷) اگر ایک خط مستقیم دو حصون مین تقسیم کیا جائے تو بتاؤ سطح ان دونون حصونکی کب نہایت سی نہایت زیادہ ہوگی اور حصون کے مربعون کا مجموعہ کب نہایت سے نہایت کم ہوگا

(۲۸) اگر ایک خط دو مساوی اور دو غیر مساوی حصونمین تقسیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ حصہ کہ مابین نقاط تقسیم کے واقع ہے برابر ہے نصف فرق حصص غیر مساوی کے

(۲۹) اگر دو غیر مساوی خطون کے نصف مجموعہ پر اونکا نصف فرق زیادہ کرین تو مجموعہ برابر بڑے خط کے ہوگا اور اگر اونکے نصف مجموعہ مین نصف فرق کم کرین تو باقی خط برابر چھوٹے خط کے ہوگا

(۳۰) خط مستقیم کے داخلی اور خارجی حصون سے کیا مراد ہے اور ثابت کرو کہ مجموعہ حصص خارجی کا یا فرق حصص داخلی کا دوچند اوس خط سے ہوتا ہے جو درمیان نقطہ تنصیف اور تقسیم کے واقع ہے

(۳۱) بتلاؤ کس طرح (۵ش ۲م) سے (۶ش ۲م) مستنبط ہوتی ہے

(۳۲) برہان ہندسیہ سے ثابت کرو کہ دو خطون کے مجموعہ و فرق پر جو مربعے بنائے جائین اونکا مجموعہ دوچند ہوتا ہے اون خود خطون کے مربعون سے

(۳۳) ایک قائم الزوایا دو خطوط مستقیم سے چار قائم الزاویون مین تقسیم ہوئی ہے اور اون مین سے جن دو کے ضلعے مشترک نہین ہین اونکا رقبہ معلوم ہے تو باقی دو کا رقبہ دریافت کرو

(۳۴) دو خطون کا فرق کتنی طرح سے بیان کیا گیا ہے اور اس مقالہ کی کن شکلون مین وہ مذکور ہے

(۳۵) (۱۱ش ۲م) مین جس طرح خط اب تقسیم ہوا ہے اوس طرح سے تقسیم کئے گئے خطون کا ایک سلسلہ دریافت کرو

(۳۶) خط معلوم ط کو جبر مقابلہ مین ایسے دو حصونمین تقسیم کرو کہ سطح کل خط کی ایک حصہ مین

برابر ہو دوسرے حصہ کے مربع کے - ایک حل کو تو مطابق اوس شکل سے کرو جو اصل اقلیدس مین ہے اور دوسرے حل کو بتلاؤ کہ وہ کس شکل کو تعبیر کرتا ہے

(۳۷) (۱۱ ش ۲ م) کی طرح ایک خط دو حصوں مین تقسیم کیا گیا ہے اور اون مین سے چھوٹا حصہ معلوم ہے تو بڑا حصہ دریافت کرو

(۳۸) بتلاؤ یہہ صور جبریہ کن مسائل حسابیہ کو تعبیر کرتی ہین

(ط+ص)^۲ = ط^۲ + ۲ طص + ص^۲ اور ط^۲ - ص^۲ = (ط - ص) (ط + ص) اور (ط - ص)^۲ = ط^۲ - ۲ طص + ص^۲ اور اسکے مطابق جو اقلیدس کی شکلین ہون اونکو بھی بیان کرو

(۳۹) ان صور جبریہ (ط+ لا) (ط - لا) + لا^۲ = ط^۲ و (ط + لا)^۲ + (ط - لا)^۲ = ۲ ط^۲ + ۲ لا^۲ سے ثابت کرو کہ اول صورت جبریہ سے (۵ و ۶ ش ۲ م) تعبیر ہوتی ہین اور دوسری صورت سے شکل جبریہ (۹ و ۱۰ ش ۲ م)

(۴۰) ۱۲ ش ۲ م کو ثابت کرو جب عمود ب ی نقطہ ب سے نکالا گیا اوس خارج شدہ سے نقطہ ی پر ملتا ہے اور یہہ بھی ثابت کرو کہ سطح ب س اور س د کی برابر ہے سطح ا س اور س ی کے

(۴۱) (۱۳ ش ۲ م) کی دو صورتون کو ایک برہان سے ثابت کرو

(۴۲) (۱۳ ش ۲ م) کی دوسری صورت مین ایک عمود س ی زاویہ منفرجہ س سے ضلع ا ب پر نکالا گیا ہے تو ثابت کرو کہ ا ب کا مربع برابر ہے سطح ا ب و ا ی مع سطح ب س اور س د کے

(۴۳) ۱۴ ش ۲ م کا دعوی بیان کرو اور اوسکو جبر مقابلہ او حساب مین ثابت کرو

(۴۴) ایک مثلث کی ضلعے ۳ و ۴ و ۵ ہین تو دریافت کرو کہ زاوئے مابین ۳ و ۴ کے اور ۴ و ۵ کے اور ۳ و ۵ کے کیسے ہین

(۴۵) ایک مثلث کی دو ضلعے ۴ و ۵ انچہہ ہین اگر تیسرا ضلع $۶\frac{۷}{۱۶}$ انچہہ ہو تو مثلث حادہ الزاویہ ہوگا اور اگر تیسرا ضلع $۶\frac{۹}{۱۶}$ ہو تو منفرج الزاویہ

(۴۶) ایک مثلث کی ضلعے ۷ و ۸ و ۹ پیمانہ واحد ہین ۲ پیمانہ واحد کے برابر اس مثلث مین سے ہر طرف ایک ٹکڑا کاٹا گیا ہے تو باقی کا رقبہ کیا ہے

(۴۷) اگر (۴ اش ۲م) مین اصل شکل مثلث قائم الزاویہ ہو جسکے ضلعے ۸ و ۹ سے تعبیر ہوتے ہین تو بتا جس مربع کا رقبہ اس مثلث کے رقبہ کے برابر ہوگا اوسکا ضلع کیا ہوگا اور یہہ بہی ثابت کرو کہ اضلاع مربع کا مجموعہ چہوٹا مثلث کے مجموعہ اضلاع سے ہوگا

(۴۸) ایک قائم الزاویہ کے دو متصل کے ضلعون کا طول ۸ و ۲ فیٹ ہے تو بتاؤ اوسکے برابر مربع کا ضلع کیا ہوگا

(۴۹) سطح مستقیمۃ الاضلاع مربعون مین تقسیم ہوسکتے ہین اور وہ سب مراتب بتلاؤ جنہین اقلیدس نے اسبات کو ثابت کیا ہے

(۵۰) ایک کثیرۃ الاضلاع کے برابر مربع بنانے کی ترکیب بتاؤ گو ثبوت نہو

(۵۱) ۱۴ اش ۲م سے ثابت کرو کہ اوس مقدار جبریہ جزر ولی ۱۳ سے ایک خط تعبیر ہوسکتا ہے اگر پیمانہ واحد خط ہو

(۵۲) ایک قائم الزاویہ معلوم کو کس طرح قطع کرین کہ وہ ایک طول معلوم کے قائم الزوایا بنجاے

(۵۳) اگر ۲ش ۲م مین اضلاع قائم الزوایا کے اعداد معلوم ہون تو کیا شرط ہونی چاہئے کہ ضلع مربع کا عدد منطق سے تعبیر ہو

(۵۴) ثابت کرو کہ ہر متوازی الاضلاع کا رقبہ برابر ہوتا ہے سطح قطر متوازی الاضلاع اور اوس عمود کے جو کسی زاویہ سے اوسپر نکالا جائے

(۵۵) اول اور دوم مقالہ مین جو خواص مثلث کے ثابت ہون اونکو بیان کرو

(۵۶) کیا کوئی ترکیب فائدہ مند ہے جسے بعض شکلین اقلیدس کی اپنے ماقبل کی شکلونکے نتیجہ صریح بن سکتی ہین ۶ اگر ہین تو اونکو مع دلائل بیان کرو فقط

تمت تمام شد

غلط نامہ

مقالہ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸	۲	کی تضیف کئے گئے	تضیف کئے گئے کے

شرح مقالہ سوم

مقالہ اول و دوم مین جو جو خواص اشکال ثابت ہوئے ہین اونکی استعانت سی مقالہ سوم مین دائرہ کے خواص ثابت کئے ہین دائرہ سے کبھی مراد وہ سطح ہوتی ہے جو محیط سے گھری ہے کبھی فقط محیط ہی مراد ہوتی ہے اقلیدس نے محیط کا اطلاق کبھی کل پر اور کبھی اوسکی جزء پر کیا ہی اسسے اشتباہ پیدا ہوتا ہی اوسکے دور کرنیکے لئے محیط کی جزء کا نام قوس کہا ہی اور جہان جہان قوس کا ذکر ہو وہان محیط کا حصہ سمجھو دائرہ معلوم المقام سے مراد وہ دائرہ ہی جسکے مرکز کا مقام معلوم ہو اور دائرہ معلوم المقدار سے وہ دائرہ مراد ہے جسکا نصف قطر معلوم ہو

حد ۱ - اس حد مین یہہ اوریا ہے کہ یا محیط اونکے برابر ہون اور یہہ عکس اوسکا زیادہ ہونا چاہیے کہ اگر دو دائرے برابر ہون تو اونکے قطر یا نصف قطر برابر ہونگے اور اونکے محیط بھی متساوی ہونگے سمسن صاحب نے اس حد کو شکل اثباتی بتلایا ہے اور اقلیدس نے اوسکو بدیہی سمجھکر علوم متعارفہ بنایا ہی اور استدلال دائرون کے مساوات کا اوسپر قائم کیا ہے

حد ۲ - اسمین یہہ بات ضمناً آگئی کہ اگر ایک خط مستقیم دائرہ سی ملے مگر مس نکرے تو وہ خارج ہونیسے دائرہ کو قطع کرتا ہے جو خط دائرہ کو مس کرتا ہے اوسی مماس کہتے ہین اور جو قطع کرتا ہی اوسے خط قاطع

حد ۳ - دائرون کے محیط جب مجوف طرف مس کرتے ہین تو اونکو کہتے ہین کہ وہ اندر کیطرف مس کرتے ہین اور جب محیط اونکی محدب طرف مس کرتے ہین تو اونکو کہتے ہین کہ باہر کیطرف مس کرتے ہین دوائر متماسہ اندرونی مین محیطون مین ایک یا کئی نقطہ مشترک ہوتے ہین اور باقی سارے نقطے ایک دائرہ کے دوسرے دائرہ کی اندر واقع ہوتے ہین اور دوائر متماسہ بیرونی مین ایک یا کئی نقطے محیط مین مشترک ہوتے ہین اور باقی سب نقطے ایک دائرہ کے دوسرے دائرہ سے باہر واقع ہوتے ہین دو دائرون کو متماسہ اندرونی کہنا بالکل ٹھیک نہین ہے

حد ۴ بعد خط مستقیم کا مرکز سے وہی معنی رکھتا ہی جو ایک نقطہ کا بعد خط مستقیم سے شرح اشکال اول کو دیکھو

حد ۵ قطعہ دائرہ سے وہ ٹکڑا دائرہ کا مراد ہے جو ایک خط مستقیم سے قطع ہوتا ہے

حد ۶ و ۱۰ محیط کے حصہ کو قوس کہتے ہیں اور جو خط مستقیم قوس کے اطراف میں ملایا جائے اوسے وتر قوس کہتے ہیں سہم وتر سوا قوس کے دائرہ کو دو ایسی قطعوں میں تقسیم کرتا ہے کہ ایک قطعہ نصف دائرہ سے بڑا اور دوسرا نصف دائرہ سے چھوٹا ہوتا ہے اور سطح اگر مرکز سے دو نصف قطر کھینچے جائیں تو دائرہ دو غیر مساوی قطاع میں تقسیم ہوگا اور یہہ قطاع اوس صورت میں مساوی ہونگے کہ یہہ نصف قطر مرکز کھینچے ایک خط مستقیم میں ہوں چونکہ اقلیدس وتر یا مندرجہ کا ذکر نہیں کرتا اسلئے قطاع دائرہ نصف دائرہ سے کم کا فقط ذکر آتا ہے ۔ ربعہ دائرہ وہ قطاع ہے جو درمیان نصف قطروں کے جو عمود ایک دوسرے پر ہوں واقع ہو وہ چوتھائی حصہ دائرہ کا ہوتا ہے

حد ۷ اس حدود کا کام اقلیدس میں نہیں آیا

حد ۱۱ صرف قطعات متشابہ کا ذکر ۳۳ و ۳۴ شکلوں میں آیا ہے اور اونمیں صرف اونکے مساوات کا ذکر ہے

شکل ۱ یہہ محاورہ کہ خط دائرہ کے اندر کھینچے گئے ہیں اس معنی میں آتا ہے کہ اون خطوط کے اطراف محیط پر واقع ہیں ۔ اگر قطر س ی میں ح واقع ہو اور نقطہ ف پر منطبق نہو تو اصل میں جو ثبوت لکھا ہے وہ کافی نہیں ہوتا مگر یہہ ظاہر ہے کہ اس صورت میں بھی ح مرکز نہیں ہو سکتا اسلئے کہ ح س برابر ح ی کے نہیں ہے ۔ سب سے زیادہ عمدہ ترکیب مرکز پانے کی یہہ ہے کہ دو وتر کھینچو اور اون کو نصف کرکے نقاط تنصیف سے عمود نکالو جہاں وہ قطع کریں وہی مرکز ہوگا جیسا د ش ۲ م میں لکھا ہے ۔ دلیل خلف کا کام بہ نسبت مقالہ اول کے مقالہ سوم میں زیادہ تر پڑا ہے اول مقالہ کی ۴۸ شکلوں میں صرف نو شکلیں دلیل خلف سے ثابت ہوئی ہیں اور تیسرے مقالہ کی سینتیس شکلوں میں پندرہ شکلیں ثابت ہوئی ہیں ۔ ثبوت عینی بہ نسبت ثبوت خلف کے زیادہ مناسب ہونیکو قریب الفہم معلوم ہوتا ہے لیکن اثبات دونوں صورتوں میں یکساں مستحکم و مدلل ہوتا ہے اسلئے کہ ثبوت خلف میں ہر صورت جو خلاف دعوی کے ہے باطل ثابت ہوتی ہے ۔ اقلیدس تین طرح سے عکس شکلوں کا ثابت کرتا ہے اول دلیل خلف سے جیسے کہ ۶ ش ۱ م و ۱ ش ۳ م

دوم ہمارے مطلب کے خلاف جو دو صورتین ممکن ہوتی ہین اونکو فرض کر کے ثابت دیتا ہی کہ ہر ایک باطل ہے اسلئے دعوی ثابت ہے جیسے ۱۹ و ۲۵ ش ام مین سوم شکل کو اوس ترکیب سے بناتا ہے کہ ثبوت بہ خلف کی کچھہ ضرورت نہین پڑتی جیسے کہ ۴۸ ش ام و ۲۷ ش ۳ م

شکل ۲ اس شکل مین فی الحقیقت یہہ ثابت کیا ہی کہ محیط دائرہ خط مستقیم سے بالکل مختلف ہے اور اس بات کو سطح ثابت کیا ہے کہ نوس مین کوئی سے دو نقطے فرض کیے جاوین اور اونمین خط مستقیم ملایا جائے تو وہ دائرہ کے اندر واقع ہوگا اور نہ محیط پر منطبق ہوگا اور نہ دائرہ سے سوا اون نقاط مفروض کے کسی اور پر ملے گا اور اسے یہہ بھی ثابت ہوتا ہی کہ محیط دائرہ اس قابل نہین ہے کہ کسی صورت مین اوسکو توڑ موڑ کر خط مستقیم دائرہ سے باہر بنالین

اگر خط کچھہ دائرہ کے اندر کچھہ باہر واقع ہو تو محیط خط کو اوسکی طرفون کے درمیان مین کسی نقطہ پر قطع کریگا اور یہہ ثابت ہو چکا ہے کہ کسی حصہ کا دائرہ سے باہر واقع ہونا ناممکن ہے اور جو حصہ اندر دائرہ کے واقع ہے وہ موافق دعوی شکل کے ہی - اور اگر خط محیط پر واقع ہوا اور اوس پر منطبق ہو تو اسسے یہہ لازم آئیگا کہ خط مستقیم خط منحنی پر منطبق ہوتا ہے - اس شکل کا یہہ نتیجہ ہو سکتا ہی کہ خط مستقیم دائرہ کو سوا دو نقطوں کے نہین تقاطع کر سکتا - اس علوم متعارفہ کو مانین کہ اگر ایک نقطہ مرکز سے قریب بہ نسبت محیط کے متعین کیا جائے تو وہ دائرہ کے اندر واقع ہوگا تو اس شکل کا ثبوت عینی اسطرح ہو سکتا ہے کہ ا ب مین کوئی نقطہ ی کا فرض کرو اور د ا اور د ی اور د ب ملاؤ (شکل ۲ ش ۳ م) کو دیکھو چونکہ مثلث د ا ب مین د ا برابر ہے د ب کے تو بحکم (۵ ش ام) کے زاویہ د ا ب برابر ہے زاویہ د ب ا کے - اور چونکہ مثلث د ا ی کا ضلع ا ی نقطہ ب تک خارج کیا گیا ہے اسواسطے بحکم (۱۶ ش ام) کے زاویہ خارجہ د ی ب مقابل کے زاویہ داخلہ د ا ی سے بڑا ہے لیکن زاویہ د ا ی برابر ہے زاویہ د ب ی کے اسواسطے زاویہ د ی ب بڑا ہے زاویہ د ب ی سے اور بحکم (۱۹ ش ام) کے ہر مثلث مین بڑے زاویہ کی سامنے کا بڑا ضلع ہوتا ہے اسلئے ضلع د ب بڑا ہے بہ نسبت ضلع

دی کے ہے لیکن دب مرکز سے حیط تک کہینچا گیا ہے اسواسطے دی محیط سے نہین ملتا اسواسطے نقطہ ی دائرہ کے اندر واقع ہے اور نقطہ ی خط مستقیم اب مین ہے اسلئے اب دائرہ کے اندر ہے

شکل ۴ - دائرہ کے اندر دو وتر جب کہ دائرہ کے اندر گذرین تو ایک دوسرے کو تنصیف کر سکتے ہین جب وہ مرکز پر گذرینگے تو قطر بنجائینگے وتر نہین رہینگے

شکل ۵ و ۶ - ان دونو شکلون کے دعوی اصطلاح ایک دعوی مین آسکتے ہین کہ دائرے جو ایک نقطہ پر ملتے ہین اونکا مرکز ایک نہین ہوسکتا اسواسطے کہ جن دائرونکا مرکز ایک ہوا اور ایک نقطہ مشترک اونکے محیطون مین ہو تو وہ منطبق بالکل ایک دوسرے پر ہوجائینگے - اقلیدس نے تین دعوی اس ایک دعوی کے بنائے ہین اول دوائر متقاطع دوم دوائر متماسہ اندرونی سوم دوائر متماسہ بیرونی صورت سوم بدیہی تہی اسلئے اوسکو فروگذاشت کیا

شکل ۷ و ۸ - ان دونون شکلون سے ایک ہی خاصیت ثابت ہوتی ہے ایک شکل مین قطر بین نقطہ متعین کیا گیا دوسری شکل کے اندر قطر ممدودہ مین یہہ ایک مثال قطر کی تقسیم داخلی اور خارجی کی ہے

اس شکل سے یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر دو وتر متقاطع نقطہ تقاطع پر قطر کے ساتھہ برابر زاوئے بنائین تو وہ آپسمین برابر ہونگے یہہ ظاہر ہے کہ رح ہ اور ہ ف خارج ہو کر محیط سے نقاط م اور ن پر ملین تو م ن برابر ہے ن ف کے اور ح م برابر ہے ہ ن کے - اور یہہ بہی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر دو وتر ایک نقطہ سے دائرہ کے اندر کہینچے جائین اور نقطہ تقاطع سے قطر کہینچا جائے تو جتنا زاویہ جو اس قطر کے ساتھہ وتر بنائیگا قریب قائمہ کے ہوتا جائیگا اوتنے ہی چہوٹے چہوٹے غیر مساوی وتر متقاطع ہونگے - ۸ شکل مین قوس محدب اور مجوف کا ذکر آیا ہے مگر محدب اور مجوف کی تعریف حدود مین نہین کی گئی اسلئے یہان لکہنی مناسب ہے کہ قوس محدب و مجوف بلحاظ ایک نقطہ کے ہوتے ہین اگر اوس نقطہ سے خط کہینچے گئے باہر

قوس سے رہتے ہین تو وہ محدب کہلاتی ہے اور اگر قوس کے اندر وہ خطوط جاتے ہین تو وہ مجوف کہلاتی ہے

اگر ایک نقطہ معلوم سے دو مماس دائرے کے کھینچے جائین تو وہ نقاط تماس کے محیط دائرہ کو محدب اور مجوف قوسون مین بلحاظ نقطہ معلوم کے تقسیم کرین گے محیط مجوف اور محدب ہونیکا ذکر اول اول اسی شکل مین آیا ہے

اگر دو وتر دائرہ کے خارج ہوکر کسی نقطہ پر تقاطع کرین اور برابر زاوئے اوس قطر کے ساتھہ بناوین جو نقطہ تقاطع سے کھینچا جائے تو دونو وتر آپسمین برابر ہونگے

فرض کرو کہ ب د خارج ہوکر محیط سے نقطہ ع پر ملتا ہے تو وتر ب ع برابر ک ی کے ثابت ہو سکتا ہے۔

یہہ دعوی بھی ایسا ہی ہے جیسا کہ ساتوین آٹھوین شکل کا ہے کہ اگر کوئی نقطہ محیط دائرہ مین متعین کرکے خطوط مستقیم کھینچے جائین تو اون سب مین وہ خط مستقیم بڑا ہوگا جو مرکز پر سے گذرے گا اور باقی خطوط مین سے جو قریب اس خط کے ہوگا وہ بعید سے بڑا ہوگا اور اس نقطہ سے محیط تک صرف دو ہی خطوط مستقیم نکل سکتے ہین جو آپسمین برابر ہون اور ان مین سے ہر ایک بڑے خط کے ایک جانب مین ہوگا۔ اول دو جز اس دعوی کے تو (۱۵ اش ۳ م) مین ثابت ہوئے ہین اور تیسرا جز ساتوین شکل کی طرح ثابت ہو سکتا ہے اور اوسکے ثبوت کی ضرورت کی کیفیت ۱ اش ۳ م کے حاشیہ مین دیکھو

شکل ۹ زاویہ ا د س کے اندر نقطہ ی واقع ہو تو د س بڑا د ب سے اور د ب بڑا د ا سے نہین ثابت ہوگا لیکن یہہ ثابت ہوگا کہ د س یا د ا چھوٹا د ب سے ہے اور اتنی بات فقط اثبات دعوی کے لئے کافی ہے

اقلیدس نے اسطرح بھی اس شکل کو ثابت کیا ہے جسکو سمسن نے نہین لکھا کہ اب اور ب س کے نقاط وسط م و ن اور نقطہ د مین خطوط مستقیم وصل کرو تو بحکم (۱ اش ۳ م) کے مرکز دائرہ کا دم اور دن مین ہوگا اسلئے ضرور د ہی مرکز ہوگا اسلئے کہ دو خطوط مستقیم مین ایک نقطہ سے زیادہ کوئی نقطہ مشترک نہین ہو سکتا

یہہ شکل نتیجہ ۲ ش کا معلوم ہوتا ہے

شکل ۱۰ - اس شکل کو اقلیدس نے دو طرح ثابت کیا تہا مگر سمسن نے صرف ایک ہی طرح لکہا ہے اقلیدس کا دوسرا ثبوت ایسا ہی جیسا کہ نوین شکل کا دوسرا ثبوت تہا اوسنے یہہ ثابت کیا ہی کہ مرکز ہر دائرہ کا اون خطوط مستقیم مین ہے کہ نقطہ ک اور نقاط وسط ب ج اور ب ہ مین ملائے جائین اسواسطے ی مرکز دونو دائرون کا ہے - سمسن نے جو ثبوت لکہا ہے وہ ناقص ہے اسکے تکمیل اسطرح ہونی چاہیے کہ نقطہ ک باہر دائرہ دی ف سی یا اوسکے محیط مین یا اوسکے اندر واقع ہوسکتا ہے ان تینون صورتون مین سے نقطہ آخر کی صورت اقلیدس نے لکھی ہے اگر نقطہ ک باہر دائرہ دی ف سی واقع ہو تو آٹھوین شکل تیسرے مقالہ کی خلاف نتیجہ نکلیگا اور اگر نقطہ ک محیط دائرہ دی ف مین فرض کیا جائے تو نتیجہ خلاف اوس دعوی کے نکلیگا جو ہم نے ساتوین آٹھوین شکل مین ثابت کیا ہے دونو صورتون سے باطل نتیجہ نکلیگا اسلئے دعوی ثابت ہوگا اس شکل مین صرف یہہ ثابت ہوا کہ دو دائرون کے محیط مین دو نقطون سے زیادہ نقطے مشترک نہین ہوسکتے اور ثبوت مین ذکر اس بات کا نہین آیا کہ دائرے تقاطع ہی کرتے ہون مگر دعوی دوائر متقاطعہ سے ہی متعلق ہے اسلئے کہ ۱۳ ش ۳ م مین ثابت کیا ہے کہ دو دائر متماس مین ایک نقطہ سے زیادہ نقطے مشترک نہین ہوسکتے

شکل ۱۱ و ۱۲ - ان دو شکلون مین نقطہ تماس کا ذکر آیا ہے اگرچہ ثبوت اسکا کہ نقطہ تماس ایک ہی ہوتا ہے تیرہوین شکل مین ہوا ہے مگر ۱۱ شکل کا ثبوت اوس صورت مین بہی قائم رہیگا اگر د اور ہ منطبق ہون اور علی ہذا القیاس بارہوین شکل کا ثبوت بہی قائم رہیگا اگر س اور د منطبق ہون ان دونو شکلون کے دعوی اس ایک دعوی مین آسکتے ہین کہ اگر دو دائرے مس کرین تو ممکن نہین کہ کوئی نقطہ مشترک اونکے محیطون مین اوس خط مستقیم کی سمت سے جو اونکے مرکزون مین ملایا ہے متجاوز ہو

گیارہوین شکل تو ۲ ش ۳ م سے اسطرح آسانی ثابت ہوتی ہے کہ اوس دائرہ کے اندر

جسکا مرکز ف ہی ح ہ نہایت چھوٹا خط اون خطوط مین سے ہے کہ نقطہ ح سے کھینچے ہو اسطے ب ح ہ چھوٹا ح آ سے ہے یعنی کم ح د سے اور یہہ باطل اور علی ہذا القیاس بارہوین شکل آٹھوین شکل سے مستنبط ہوتی ہے

اگر یہہ دونو شکلین اٹھارہوین شکل کے بعد ثابت ہوتین تو ثبوت عینی اونکا ہوتا فرض کرو کہ خط مستقیم دونو دائروں کو نقطہ آ پر مس کرتا ہو ف اور ح دائروں کے مرکز ہون ملاؤ ف ا اور ح ا تو ہر ایک خط ان مین سے اوس خط پر عمود ہوگا جو دائرونکو نقطہ آ پر مس کرتا ہے پس اگر دائرے باہر ایک قوس سے ہین تو بحکم (۱۴ اش ام) کے ف ا ح ایک خط مستقیم ہوگا اگر ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے اندر ہے تو ا ف کچھہ منطبق ا ح پر ہوگا

شکل ۱۳ — دو دائرے متماسہ اندرونی کی صورت کو اقلیدس نے اسطرح ثابت کیا ہے کہ فرض کرو دائرہ ی ب ف دائرہ ا ب س کو اندر کی طرف ایک نقطہ سے زیادہ نقطوں پر مس کرتا ہے یعنی نقاط ب اور د پر شکل ۱۳ مقالہ سوم کو دیکھو فرض کرو کہ ع مرکز دائرہ ا ب س کا اور ق مرکز دائرہ ی ب ف کا ہے ملاؤ ع ق تو ع ق ناج ہونے سے ضرور نقطہ تماس ب اور د پر گذریگا پس چونکہ ع مرکز دائرہ ا ب س کا ہے تو ع ب برابر ہے ع د کے لیکن ع ب بڑا ق د سے ہے تو ق ب بہت بڑا ہوئے ق د سے بڑا ہوگا اور چونکہ نقطہ ق مرکز دائرہ ی ب ف کا ہے اور ق ب برابر ہے ق د کے اور چونکہ ق مرکز دائرہ ی ب ف کا ہے تو ق ب برابر ق د کے لیکن ق ب بڑا ق د سے ہے یہہ ناممکن ہے واسطے ایک دائرہ دوسرے دائرہ کو الخ

شکل ۱۶ اگر اس علوم متعارفہ کو مان لین کہ اگر ایک نقطہ مرکز سے پرے بہ نسبت محیط کے متعین کیا جاوے تو وہ دائرہ کے باہر واقع ہوگا تو شکل کا عینی ثبوت ہو جائیگا - اگر ایک دائرہ دوسرے دائرہ کو اندر کیطرف یا باہر کیطرف مس کرے تو نقطہ تماس پر دونو دائروں کا ایک ہی مماس ہوگا

شکل ۱۷ - نقطہ معلوم جب دائرہ معلوم سے باہر واقع ہو تو ظاہر ہے کہ اس نقطہ سے دو متساوی مماس دائرہ کے نکل سکتے ہین ف د کو خارج کرو کہ دائرہ ا ک ف سے کے

محیط سے نقطہ ک پر ملے اور ی ک محیط دائرہ د ب س سے نقطہ ہ پر ملے اور ملاؤ ا ہ
تو ا ہ مماس دائرہ کا نقطہ ا سے کھینچا گیا برابر ا ب کے ہوگا
ا ب نقطہ ب پر ختم نہین ہوتا بلکہ اوسکو جتنا لنبا چاہو کرلو
دائرہ معلوم کا مماس کسی بیرونی نقطہ معلوم سے اس ترکیب سے خوب کھنچتا ہے کہ نقطہ معلوم اور
مرکز دائرہ معلوم مین خط وصل کرکے اوس پر نصف دائرہ دائرہ معلوم کو کاٹتا ہوا بناؤ تو خط نقطہ معلوم
اور نقطہ تقاطع مین ملایا گیا مماس دائرہ ہوگا
متحد المرکز یا ہم مرکز اون دائرون کے کہتے جنکا مرکز ایک ہی ہو
محیط کسی نقطہ سے مماس دائرہ کا بغیر مرکز دریافت کرنے کے اسطرح معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ معلوم سے
د ب اور ب س برابر قوسین
محیط کے فرض کرو اور ملاؤ د س اور
د کو مرکز اور د ب کو نصف قطر مقرر کرکے
دائرہ ف ب ہ کھینچو جو د س کو نقطہ ف پر
قطع کرے اور ب ف کے برابر ب ہ قطع کرو اور ملاؤ ہ د تو ہ د مماس دائرہ ہوگا ثبوت مین
۲م ۳ش ۴م کی ضرورت پڑتی ہے

شکل ۱۹ - ۱۶ شکل کا عکس ہے اسواسطے کہ محیط دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس وہ خط مستقیم
ہوتا ہے کہ اوس قطر پر کہ اس نقطہ تک کھینچا جائے زاویہ قائمہ بناتا ہو

شکل ۲۰ - اگر محیط دائرہ مین دو نقطے ا اور ب متعین کئے جائین
اور اون سے دو خطوط مرکز س تک کھینچے جائین اور دو اور خط محیط کے
کسی نقطہ د تک تو دو زاوئے پیدا ہون گے ایک زاویہ ا س ب
جسکو زاویہ مرکزی کہتے ہین اور دوسرا زاویہ ا د ب ہے
جسکو زاویہ محیطی کہتے ہین

اس شکل کو اقلیدس نے فقط اوس صورت مین ثابت کیا ہے جسمین زاویہ محیطی قائمہ سی چہوٹا ہے
اور ثبوت پر کچہہ اعتراض نہین ہے اور جب زاویہ محیطی قائمہ ہو تو زاویہ مرکزی نابود ہو جاتا ہے
اسلئے کہ دو خطوط مستقیم جو مرکز سے قوس کی طرفون مین لائے جائین ملکر ایک خط مستقیم
بنجاتے ہین اور اگر زاویہ محیطی منفرجہ ہو تو مرکز سے خطوط مستقیم کہینچے گئے اوس قوس پر
نہین قائم ہوتے بلکہ اوس قوس پر واقع ہوتے ہین جو متمم تمام محیط کی ہے

اگر زاویہ کے معنی محدود لین جو اقلیدس نے بیان کئے ہین تو یہہ شکل علم ہندسہ مین فقط اوسی
صورت خاص مین صحیح ہے جو زاویہ مرکز پر دو قائمون سے بڑا نہو لیکن اگر زاویہ کا تتمہ چار قائمون کا
بہی ایک زاویہ خیال کیا جائے تو یہہ شکل صورت عام پیدا کریگی اور مرکز اور زاویہ مین ایک
خط ملاکر خارج کرنے سے موافق پہلی صورت کی ثابت ہو جائیگی

صورت اول مین یہہ مان لیا ہی کہ اگر چار مقدارین ہون اور اول مقدار دوسری مقدار سے
اور تیسری مقدار چوتہی مقدار سے دوچند ہو تو اول و سوم کا مجموعہ دوسری اور چوتہی
مقدارون کے مجموعہ سے دوچند ہوگا اور دوسری صورت مین یہہ مان لیا ہے کہ اگر ایک مقدار دوسری
مقدار سے دوچند ہو اور پہلی مقدار کا ایک جز دوسری مقدار کے ایک جز سے دوچند ہو تو
باقی جز پہلی مقدار کا دوسری مقدار کے باقی جز سے دوچند ہوگا

صورت اول ایک خاص صورت ہی (اشں ۵ م) کی اور دوسری ایک خاص صورت
(د شں ۵ م) کی

اگر اقلیدس مین زاویہ کی تخصیص دو قائمون سے کم ہونیکی چہوڑ دین تو بعض شکلین اقلیدس کی
مختصر ہو جائینگی ۲۱ ش ۳ م کی دو صورتین بنانیکی ضرورت نہین رہیگی اور ۲۲ ش ۳ م
اس سبب سے کہ زاویون کا مجموعہ مرکز پر برابر چار قائمون کی ہوتا ہے آسانی سے ثابت ہو گی
اور ۲۰ ش ۳ م سے ۲۱ ش ۳ م آسانی سے ثابت ہو جائے گی

شکل ۲۱ - اسی ثابت ہے کہ مثلث جو ایک قاعدہ پر واقع ہون اور اونکے زاوئے راس

برابر ہون تو مقام التقاطر اسون کا ایک دائرہ ہوگا ثبوت اسکا ۵ ش ۴م پر موقوف ہے
اسلیئے کہ جب کسی مثلث پر دائرہ بحکم (۵ ش ۴م) کے کھینچینگے تو کوئی راس مثلث کا اس دائرہ
سے باہر نہین واقع ہوگا

شکل ۲۲ عکس اس شکل کا کہ اگر ذوار بعۃ الاضلاع کے دو دو زاویئے مقابل کے ملکر برابر دو قائمون کے ہون
تو ایک دائرہ اس ذوار بعۃ الاضلاع پر بن سکتا ہے۔ ثبوت اسکا ۵ ش ۴م پر موقوف ہے
اسواسطی کہ بحکم (۵ ش ۴م) مثلث اب س پر دائرہ کھینچین اور کوئی نقطہ محیط قطعہ مین
کہ اس سے قطع ہوتا ہے اوس سمت مین کہ د ہی مقرر کرین تو بحکم (۲۲ ش ۳م)
کے زاوئے ب اور ی ملکر برابر دو قائمون کے ہونگے اور بموجب فرض کے زاوئے
ب اور د برابر دو قائمون کے ہین اسواسطے زاویہ س برابر ہے زاویہ د کے
اسواسطی موافق حاشیہ (۲۱ ش ۳م) کہ د اور ی قطعہ کے محیط مین سے ہین [illegible]
۔ یہہ بھی ظاہر ہے کہ کسی دائرہ کے اندر جو چار ضلع کے شکل بنی ہوئی ہو اوسکا ایک ضلع خارج
کیا جائے تو زاویہ خارجیہ برابر ہوگا مقابل کے زاویہ داخلہ کے

شکل ۲۳۔ ظاہر ہے کہ جو قطعے ایک قاعدہ پر واقع ہون اور کسی [illegible] برابر ہوگا وہ چھوٹا ہوگا

شکل ۲۴۔ یہہ شکل بعینہ اس فرض کا ہے کہ اگر دو دائرون کے نصف قطر برابر ہون تو وہ دائرے
برابر ہونگے اور محیط اونکے برابر ہونگے

شکل ۲۵۔ اس شکل کے تینون صورتین اس ایک صورت سے ثابت ہو سکتی ہین کہ دو وتر منفصل
کھینچکر اونکے نقاط تنصیف سے عمود وترون پر نکالین اسی جہان یہہ ملینگے وہان مرکز دائرہ ہوگا
اس شکل کے دعوے کے اور اس عوے کے ایک ہی معنی ہین کہ ایک نقطہ ایسا دریافت کرو کہ
اوسکا فاصلہ تین نقاط معلومہ سے جو ایک خط مستقیم مین نہین ہین برابر ہین

شکل ۲۶ چونکہ قطعات متساویہ ب ک س اور ی ل ف برابر قاعدون ب س اور
ی ف پر واقع ہین تو قوس ب ک س برابر ہے قوس ی ل ف کی بموجب ۲۴ ش ۳م کے

شکل ۲۶-۲۹- جو خواص دوائر متساویہ کے ان شکلون مین ثابت ہوئے ہین وہی ایک دائرہ کے لئے بہی ثابت ہین اور ۲۱ ش ۱ م مین ذکر کیا گیا ہے کہ زاوئے مرکزی جو برابر قوسون پر واقع ہون برابر ہوتے ہین

شکل ۳۰- اس شکل کے اثبات سے ظاہر ہی کہ جو خط مرکز سے کہیچا گیا وتر کی تنصیف کرتا ہی وہ قوس کی بہی تنصیف کرتا ہی اور جو قوس کی تنصیف کرتا ہی وہ وتر کی بہی تنصیف کرتا ہے

شکل ۳۱- اس شکل سے ایک ترکیب معلوم ہوتی ہے کہ جس سے عمود ایک خط مستقیم پر نقطہ معلوم سے جو خط معلوم کی طرف پر واقع ہو بغیر خارج کرنیکے نکال سکتے ہین- اگر مثلث متساوی الساقین کی ایک ساق قطر دائرہ ہو تو قاعدہ محیط سے تنصیف ہوگا- اور شکل سے یہہ بہی ظاہر ہے کہ مثلث قائم الزاویہ کے وتر کا نقطہ وسط برابر فاصلہ پر مثلث کی تینون نقاط زاویہ سے ہوتا ہے-

شکل ۳۲- اس شکل کا عکس اقلیدس نے یہہ نہین ثابت کیا کہ وہ اسطرح بنتا ہی اور ثابت ہوتا ہی کہ اگر ایک خط مستقیم دائرہ سے ملے اور ملاپ کے نقطہ سے ایک خط مستقیم دائرہ کو قطع کرتا ہوا کہیچا جائی اور زاوئے ان دو خطوط مستقیم کے درمیان برابر زاویہ قطعہ متبادلہ کے ہون تو خط مستقیم کہ دائرہ سے ملتا ہے مماس دائرہ ہوگا اسواسطے کہ اگر یہہ مماس دائرہ نہو تو نقطہ ملاپ سے ایک مماس نکال لو تو بحکم ۳۲ ش ۱ م کے ثابت ہوگا کہ دو خطوط مستقیم ایک تیسرے خط مستقیم کے ایک نقطہ پر ایک جانب مین ایک ہی زاوئے پیدا کرتے ہین اور یہہ ناممکن ہے

شکل ۳۵- صورت عام اول ثابت ہوتی اور بہر آوا ور آسان خاص صورتین ثابت ہوتین تو مناسب تہا لیکن اقلیدس ہمیشہ اول آسان صورت ثابت کرتا ہی اور بتدریج اور مشکل صورتین ثابت کرتا ہے ہم اقلیدس کی ترکیب کے برعکس اسطرح ثابت کرتے ہین کہ ۳۵ ش ۳ م کی آخر صورت مین جس طرح شکل بنائی ہے اوسیطرح بناؤ ملاؤ ف ا اور ف د اور ف ک عمود ا س پر نکالو اور ف ل عمود ب د پر تو بحکم (۵ ش ۲ م) کی سطح ا ی اور ی س کی مع ی ک کے مربع کے برابر ہے ا ک کے مربع کے ان مساویون پر مربع ف ک کا زیادہ کرو تو سطح

ا ی اور ی س کی مع مربعوں ی ک اور ف ک برابر ہوئے ا ک اور ف ک کے مربعوں کے لیکن مربعات ی ک اور ف ک برابر ہیں ی ف کے مربع کے تو مربعات ا ک اور ف ک برابر ہوئے مربع ز ف ہ کے تو اسسے ثابت ہوا کہ سطح ا ی اور ی س کی مع مربع ی ن کے برابر مربع ف د کے اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ سطح ب ی اور ی د کی مع مربع ی ن کے برابر ہے مربع ف د کے اور مربع ف د برابر ہے مربع ا ف کے تو سطح ا ی اور ی س کی مع مربع ی ف کے برابر ہے سطح ب ی اور ی د مع مربع ی ف کے ان مساویوں سے مربع ی ف کا ساقط کرو تو سطح ا ی اور ی س کی برابر ہوئی سطح ب ی اور ی د کی اور آسان صورتیں اس صورت سے بآسانی مستنبط ہو سکتی ہیں۔

اسکا عکس اقلیدس نے نہیں ثابت کیا یعنی اگر دو خطوط مستقیم اس طرح تقاطع کریں کہ ایک خط مستقیم کے حصوں کی سطح برابر ہو دوسرے خط مستقیم کے حصوں کی سطح کے تو دونوں خطوں کے اطراف پر دائرہ گذرتا ہوا کھنچ سکتا ہے یا اس مطلب کو اس طرح ادا کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو اس طرح قطع کریں کہ ایک وتر کے حصوں کی سطح برابر ہو دوسرے وتر کے حصوں کی سطح کے تو اس ذو اربعۃ الاضلاع پر دائرہ بن سکتا ہے۔ اسکا ثبوت بھی دش ۳۴ پر موقوف ہے +

شکل ۳۶ اس شکل کے نتیجہ کا عکس اس طرح بیان ہوتا ہے کہ اگر دو خطوط مستقیم ہوں اور وہ خارج ہو نیسے اس طرح ملتے ہوں کہ سطح خط ممدودہ کی اوسکے حصہ ممدودہ میں برابر ہو دوسرے خط خارج شدہ کے سطح کو اوسکے حصہ خارجہ میں تو دائرہ ان دو خطوں کے اطراف پر گذرتا ہوا کھنچ سکتا ہے یا اس مطلب کو اس طرح ادا کرو کہ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے دو ضلعے خارج ہو کر اس طرح ملتے ہوں کہ ایک ضلع ممدودہ کی سطح حصہ ممدودہ میں برابر ہو دوسرے ضلع ممدودہ کی سطح کو حصہ ممدودہ میں تو اوس ذو اربعۃ الاضلاع پر دائرہ بن سکتا ہے

شکل ۳۷ اگر ۲ حد ۳۴ م کے حاشیہ کا حکم لگائیں تو ثبوت اس شکل کا مختصر ہو جائے گا اسواسطے کہ اگر ب م دائرہ سے نقطہ ب پر ملتا ہے اور اوسکو مس وہی نقطہ پر نہیں کرتا تو چاہیئے کہ خارج ہو کر دائرہ کو دو نقطوں پر قطع کرے تو محال لازم آئیگا

یہہ بات بہی قابل یاد رکہنے کی ہے کہ مقالۂ اول کی ۸ ہ شکل اور مقالہ سوم ۷ ہ شکل مین عکس دعوی کو برہان خلف سے نہین ثابت کیا

سوالات مقالہ سوم

(۱) نصف قطر اور قوس اور محیط اور وتر اور خط قاطع دائرہ کی تعریف صحت سے کرو

(۲) قطعہ و قطاع کی صورت مین کیا فرق ہے کوئی صورت ایسی بہی ہے کہ دونو قطاع اور قطعہ کی ایک ہی شکل ہو

(۳) دوائر متساویہ کے باب مین کیا اعتراض ہوا ہے۔ دائرہ معلوم سے کیا مراد ہوتی ہے اور مقام اور مقدار دائرہ کے معلوم ہونیکے لئے کتنے نقطون کا دریافت ہونا ضرور ہے

(۴) قطعات متشابہ کسے کہتے ہین اور اقلیدس کی جن شکلون مین اس حد کا کام پڑا ہے اونکے دعوے بیان کرو اور بتاو اوسکے معنی غیر محدود لئے گئے یا محدود

(۵) ہر ایک دائرہ ایک خط مستقیم سے یا دوسرے دائرہ سے کن نقطون پر قطع ہوتا ہے

(۶) خطوط متساوی الابعاد مرکز سے کب کہلاتے ہین

(۷) اش ۳ م کے ثبوت بہ خلف کی ضرورت کیون ہوئی

(۸) کسی خط مستقیم کو تنصیف نہ کرو اور مرکز دائرہ دریافت کرلو

(۹) اگر دو مساوی دائرون مین سے ایک دائرہ کا محیط دوسرے دائرہ کے مرکز مین سے گذرے تو ثابت کرو کہ ان دائرون کے دو حصے جو ایک دوسرے کے محیط سے باہر ہین آپسمین برابر ہونگے

(۱۰) اگر ایک خط مستقیم مرکز سے گذر کر دوسرے خط مستقیم کو دائرہ کے اندر تنصیف کرے تو وہ اوسکے قائمے زاویون پر تنصیف کریگا کوئی صورت مستثنے اس دعوی کی بتاو اور ثابت کرو کہ اگر ایک خط مستقیم قطعہ دائرہ کی قوس اور قاعدہ کو تنصیف کرے تو وہ مرکز دائرہ پر گذرے گا

(۱۱) اگر دائرہ کے اندر کوئی نقطہ مقرر کیا جائے اور ایک خط مستقیم اوس سے محیط تک کہینچا جائے تو بتاو کتنے خط اوسکے برابر کہنچ سکتے ہین اور جتنے خط کہنچ سکتے ہون اونکو کہینچو

(۱۲) ایک خط مستقیم دائرہ سے باہر ہے اوسکے اور دائرہ کے درمیان نہایت کم فاصلہ دریافت کرو

(۱۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا ایک ہی مرکز ہوتا ہے اور اون علوم متعارفہ کو بھی بیان کرو جسپر تمہارے ثبوت کا مدار ہے

(۱۴) اگر ۹ شکل ۳م مین دو ہی خط مستقیم برابر ہوتے تو بتاؤ دعوی کیون نہین اس شکل کا درست رہتا

(۱۵) ایک دائرہ کے اندر دو متوازی وترون کا طول آٹھہ و چھہ انچھہ ہے اور ایک انچھہ کا فاصلہ اونکے درمیان ہے قطر دائرہ دریافت کرو

(۱۶) ایک دائرہ کا قطر دس انچھہ ہے تو بتاؤ اوسکے اندر وتر بڑا ہوگا جسکا طول پانچ انچھہ سے زیادہ وتر جسکا بعد مرکز سے چار انچھہ ہے

(۱۷) ایک دائرہ کے اندر خطوط متساویہ کے نقاط وسط کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۸) (۱۵ شکل ۳م) مین دائرہ ب س ح ق کا مرکز ی ہے اور نصف قطر اوسکا پانچ انچھہ ہے اور بعد خط ق ح کا مرکز سے چار انچھہ ہے اور بعد خط ب س کا مرکز سے تین انچھہ ہے طول خطوط ق ح اور ب س کا دریافت کرو

(۱۹) اگر وتر قوس کا بارہ انچھہ ہے اور اوسکے دو حصے آٹھہ انچھہ اور چار انچھہ ایک دوسرے وتر سے ہوتے ہین تو بتاؤ اگر اس وتر کے ایک حصہ کا طول دو انچھہ ہو تو اوسکا طول کیا ہوگا

(۲۰) ایک قوس کا وتر پانچ انچھہ ہے اور آدھی قوس کا وتر آٹھہ انچھہ ہے تو بتاؤ اوسکے نصف قطر کا طول کیا ہوگا

(۲۱) ایک دائرہ کا قطر ۱۲ انچھہ ہے اور اوسکے ایک قوس کا وتر پانچ انچھہ ہے تو اسی دائرہ میں دو چند قوس کا وتر کیا ہوگا

(۲۲) کب ایک خط کو کہتے ہین کہ وہ دائرہ کو مس کرتا ہے ؟ حدود سے یہہ بات ثابت کرو کہ کوئی خط دائرہ کا مماس کسی نقطہ سے جو دائرہ کے اندر ہو نہین نکل سکتا

(۲۳) ایک خط مستقیم کو ایک نقطہ پر ایک دائرہ سے زیادہ دائرہ مس کر سکتے ہین ؟

(۲۴) (۱۷ شکل ۳م) مین ثابت کرو کہ ایک نقطہ سے جو باہر دائرہ سے ہے دو خطوط مستقیم متساوی دائرہ کے مماس نکل سکتے ہین اور اگر نقطہ محیط دائرہ مین ہو تو صرف ایک ہی خط مماس دائرہ کا نکل سکتا ہے

(۲۵) ایک خط مستقیم معلوم کو ایک نقطہ معلوم پر جو دائرے مس کرتے ہین اونکے مرکزون کا مقام النقاط دریافت کرو

(۲۶) بغیر مرکز دریافت کرنیکے دائرہ کا مماس ایک نقطہ سے جو محیط مین ہو کس طرح کھنچ سکتا ہے

(۲۷) ایک دائرہ مین دو وتر معلوم متقاطع علی القوائم بناؤ

(۲۸) (۱۹ شکل ۳م) بتاؤ کتنی دائرے ایک دائرہ کی برابر ایک خط مستقیم کو ایک نقطہ پر مس کرتے ہوئے کھنچ سکتے ہین

(۲۹) ۲۰ ش ۳م کا دعوی بیان کرو اور نصف دائرہ سے قاعدہ ٹھہرا ہو تو بھی یہہ دعوی درست ہے یا نہین اگر صحیح آتا ہے تو اقلیدس نے کیون نہین اوسے لکھا

(۳۰) زاویہ مرکزی زاویہ محیطی سے دوچند ہوتا ہے اسسے یہہ ثابت کرو کہ نصف دائرہ مین قائمہ ہوتا ہے

(۳۱) ایک ہی قوس جو زاویہ دائرہ سے باہر واقع ہوتا ہے وہ چھوٹا اور جو اندر واقع ہوتا ہے وہ بڑا اوس زاویہ مرکزی کے نصف سے ہوتا ہے جو اوسے قوس پر واقع ہو

(۳۲) ذوار بعۃ الاضلاع کو اوپر اور اندر دائرہ بننے کے لئے کیا شرائط ضرور ہین

(۳۳) دائرہ کے اندر متوازی الاضلاع بننے کی کیا شرائط ضرور ہین متماثل ان شرائط کی ایسی شرطین ہوسکتی ہین کہ جسسے دائرہ کے اوپر متوازی الاضلاع بن سکے

(۳۴) زاویہ فی القطعہ اور زاویہ علی القطعہ کی تعریف کرو اور ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی اندر اوسکا مجموعہ برابر دو قائمونکے

(۳۵) ۲۲ ش ۳م کا عکس ثابت کرو

(۳۶) دائرے جو دو نقاط معلوم پر گذرتے ہین ونکے مرکز ایک خط مستقیم مین ہوتے ہین

(۳۷) دائرہ کا ہر چوبکا ایک قطعہ معلوم ہے اور اقلیدس سے آسان ترکیب اس سوال کے حل کرنیکی نکالو جسمین قطعہ کی مقدار سے کچھ تعلق نہو

(۳۸) ایک دائرہ مین برابر وترونکی قوسین برابر ہوتی ہین پس اگر یہہ وتر کوئی نقطہ مشترک رکھین جسمین کہتے ہین تو وہ نقطہ مشترک محیط پر نہین ہونا چاہئے اس دعوی کو بتاؤ کہ کامل ہے یا نہین

(۳۹) ۳۱ ش ۳م کا دعوی بیان کرو اور ۲۰ ش ۳م سے اوسکو مستنبط کرو

(۴۰) ایک قطر پر جو مثلث قائم الزاویہ بنائی جائین اونکی راسون کا مقام النقاط دریافت کرو

(۴۱) کس طرح سے ایک خط مستقیم پر اوسکے ایک طرف سے عمود بغیر اوسکے خارج کرنیکے قائم ہوسکتا ہے

(۴۲) اگر نصف دائرہ مین قائمہ ہو تو ربع دائرہ مین کتنا زاویہ ہوگا

(۴۳) نصف دائرہ کی قوس کے کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم جو قطر کے اطراف مین ملائے جائین اونکی مربعونکا مجموعہ ہمیشہ مقدار مستقل ہوتی ہے اس مستقل مقدار کو نصف قطر کی رقمون مین بیان کرو

(۴۴) ۳۰ ش ۳م مین یہہ بیان کیا گیا ہے کہ برابر وترون کی قوسین برابر ہوتی ہین بڑے

برابر بڑے کا اور چھوٹی برابر چھوٹے اسکے معنی شکل مین جو کھینچی ہوئی ہے بتلاؤ

(۴۵) ایک نقطہ مین سے اور دو نقطون مین سے اور تین نقطون مین سے گذرتے ہوئے کتنے دائرے کھینچ سکتے ہین

(۴۶) ۳۳ ش ۳ م مین قطعے مین زاویہ دائرہ قائمہ ہو تو بتاؤ اوسکو کل محیط سے کیا نسبت ہوگی

(۴۷) ۳۵ ش ۳ م کے جو چار مختلف صورتین ہین اونکو ایک صورت عام مین ثابت کرو

(۴۸) ۱۴ اور ۳۵ ش ۳ م کو معکوس بنا کر اونکے دعوی بیان کرو

(۴۹) اگر ایک دائرہ کے مرکز کا مقام بلحاظ ایک نقطہ بیرونی کے معلوم ہو اور فاصلہ اوس نقطہ کا محیط سے ۱۰ انچہ ہو اور دائرہ کا مماس اوس نقطہ معلوم سے لگالا گیا ۱۵ انچہ ہو تو بتاؤ قطر دائرہ کیا ہوگا

(۵۰) ایک دائرہ سے باہر ایک نقطہ ہو اور اوس سے دو خطوط مستقیم کھینچے جائین جو محیط مجوف پر ختم ہوتے ہین اور ایک اونمین سے مرکز پر گذرتا ہو اور دوسرے خط کا حصہ جو محیط دائرہ کے درمیان ہے برابر نصف قطر کے ہو تو قطر دائرہ کا دریافت کرو اوس صورتمین کہ محیط محدب تک اون خطوط کا طول برابر ط اور س کے ہو

(۵۱) ۳۵ ش ۳ م کن شکلون پر موقوف ہے کوئی توسیع اوسکی مقالہ سوم مین کی گئی ہے

(۵۲) کن شرائط کا پورا ہونا چاہیے کہ دائرہ چار نقطون پر گذرے

(۵۳) ۳۵ و ۳۶ و ۳۷ ش ۳ م کی ہر صورت کو براہین ہندسیہ سے ثابت کرنا کس سبب سے ضرور سمجھا گیا ہے باوجودیکہ وہ سب ایک صورت جبریہ سے تعبیر ہو سکتی ہین

(۵۴) جن شکلون کا عکس اقلیدس نے مقالہ سوم مین نہین ثابت کیا اونکو بیان کرو اور جو اقلیدس نے ترکیبین عکس شکل کے ثابت کرنیکی مقالہ اول اور دوم اور سوم مین لکھی ہین وہ بیان کرو

(۵۵) ۲ ش ۳ م مین محیط دائرہ کے لیے کیا بات باقی ہے کہ جسمین دائرہ سے باہر بظاہر خط مستقیم معلوم ہوتا ہے کیا کوئی ایسا فرض دائرہ کی تعریف مین داخل ہے

(۵۶) اس مقالہ مین کوئی شکل زائد ہو جاتی یا ترمیم ہو جاتی اگر حدود مین دائرہ کے پیدا ہونیکی اسطرح اقلیدس ترکیب بیان کرتا جسطرح گیارہوین مقالہ کی ۱۴ حدین کرہ کے بیان کی ترمیم ہو جاتی +

تمام شد شرح مقالہ سوم

حواشی مقالہ چہارم

چوتھی مقالہ مین چار قسم کی عملی شکلونکا ذکر ہے دائرہ کی اندر اور اوپر مثلثون اور اور شکلون کا بنانا اور مثلثون اور شکلون کے اندر اور باہر دائرہ کا بنانا۔ اشکال قائمۃ الزاویہ کی اندر اور باہر اور اشکال قائم الزاویہ بنانے کا ذکر اقلیدس نے نہین بیان کیا۔ جس پانچ ضلعی کی مستقیمۃ الاضلاع کے اضلاع اور زاوئے آپسمین برابر ہون اوسکو مخمس کہتے ہین اور جس چھہ ضلعی کے مستقیمۃ الاضلاع کی ضلعے اور زاوئے آپسمین برابر ہون اوسکو مسدس اور علی ہذا القیاس مسبع و مثمن وغیرہ ہین ایسی شکلون کا نام کثیر الاضلاع ہے اور جب اونکے ضلعے آپسمین برابر ہون تو اونکو متساوی الاضلاع کہتے ہین اور جب اونکے زاوئے آپسمین برابر ہون تو اونہین متساوی الزوایا کہتے ہین اور جب اونکے ضلعے بھی آپسمین برابر ہون اور زاوئے بھی تو اونکو کثیر الاضلاع منتظمہ کہتے ہین

شکل ۳ اس شکل کے بنانے پر یہہ اعتراض ہوا کہ خطوط مماس دائرہ کی جو نقاط آ د ب و س سے نکالی ہین اونکے باہم ملنے کو نہین ثابت کیا یہان بھی اور اسیطرح اور سب جگہ اقلیدس نے ادسپر توجہ نہین کی اونکے ملنے کا ثبوت اسطرح ہو سکتا ہے کہ آ ب ملاؤ

اب چونکہ بحکم (۱۰ اشکل ۳ م) کہ زاوئے ک آ م اور ک ب م برابر دو قائمون کے ہین ہو اسطے زاوئے ب آ م اور آ ب م کم دو قائمون سے ہین اور اسیواسطے بحکم (۱۲ علوم) کہ آ م اور ب م خارج ہو کر ایک دوسر سے ملجائینگے اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ آ ل اور س ل بھی اور س ن اور ب ن بھی خارج ہونے سے ملتے ہین

شکل ۴ اگر اس شکل کا یہہ دعوی بنایا جاے کہ ایک دائرہ کھینچو جو تین خطوط مستقیم کو مس کرے تو یہہ شکل خاص عام ہو جائیگی۔ اگر مثلث متساوی الاضلاع ہو تو مرکز اوسکے دائرہ اندرونی کا مثلث کے زاویون راسون سے برابر فاصلہ پر ہوگا۔ مثلث متساوی الاضلاع کی اندر اور اوپر جو دائرے بنائی جاوین اونکا ایک ہی مرکز ہوتا ہے اور ایک کا نصف قطر دوسرے کی نصف قطر سے دو چند ہوتا ہے جسطرح اس شکل مین دائرہ کھینچا ہے اوسیطرح ایک دائرہ ایسا کھینچ سکتا ہے کہ وہ مثلث معلوم کے ایک ضلع کو اور دو ضلعے ممدودہ کو مس کرے یعنی خارجی زاویون کے تنصیف کرو جس نقطہ پر خطوط تنصیف کرنیوالے ملین وہی نقطہ مرکز ہوگا اور باقی ثبوت

وہی ہے جو اس شکل کا ہے اور علی ہذا القیاس ایک مثلث بنا سکتے ہیں کہ اوسکا ایک ضلع اور دو ضلعوں معلوم مدودہ دائرہ
کو مس کریں اور دو اسکی زاوی برابر ایک مثلث معلوم کے زاویوں کے ہوں ۳ اش ۴م سے یہہ بات ظاہر ہے +

شکل ۵ اسکا یہی مضمون ہے کہ دائرہ ایسا کھینچو کہ تین نقاط معلوم پر جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں گذرے
نتیجہ اس شکل کا (۱۳ اش ۴م) میں ثلث ہے۔ یہہ بات سمجھنی الحاق کی ہے کہ د ف اور س ف خارج ہونے سے ملینگے
اور بعض نے اس امر کو سطرح ثابت کیا ہے کہ دی کو ملایا تو زاویے ی د ف اور د ی ف ملکر زاویوں ا د ف اور
ا د ی ف سے یعنی دو قائموں کم ہیں اور اسیواسطے بموجب ۱۲ علوم د ف اور ی ف ملجائینگے یہہ بات ہمیں مان لی ہے کہ
زاوی ادی اور ا ی د حادی زاوی ہیں یہہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دی متوازی ب س کا ہے اسلیے مثلث
ادی متساوی الزوایا مثلث اب س کا ہے تو مثلث اب س کی دو ضلعے اب اور اس ایسے منتخب کر سکتے
ہیں کہ زاوی اب س اور ا س ب حادے ہوں

شکل ۶ یہہ بات ظاہر ہے کہ دائرہ کا مربع بیرونی دائرہ اندرونی سے دو چند ہوتا ہے اور دائرہ کے اوپر جو
مربع بنا ہے وہ قطر کے مربع کے برابر ہوتا ہے اور نصف قطر کے مربع سے چوچند ہوتا ہے

شکل ۷ مربع ہے صرف ایسی قائم الزوایا ہے کہ جو دائرہ کے اوپر بن سکتا ہے لیکن قائم الزوایا
اور مربع دونوں دائرہ کے اندر بن سکتی ہیں

شکل ۸ اس شکل کی استعانت سے ایک قائمہ پانچ برابر حصوں میں تقسیم ہو سکتا ہے اسلیے کہ زاویہ راس مثلث
کا دو قائموں کا پانچواں حصہ ہے اوسکی تضعیف کریں تو وہ قائمہ کا پانچوان حصہ ہوگا

شکل ۱۶ - دائرہ کے اندر ایک نقطہ سے ایک مخمس اور مسدس کے ایک ایک ضلع کے برابر خطوط مرتسم کریں سے
پندرہ ضلع کی شکل دائرہ کے اندر بن سکتی ہے

ایک ہی کثیر الاضلاع منتظم پر جو دائرے اندر اور باہر بنائے جائیں اونکا ایک ہی مرکز ہوگا
چوتھی مقالہ میں یہہ تو بیان کیا گیا ہے کہ مثلثات اور کثیر الاضلاعیں منتظم کسطرح دائرہ کے اندر اور باہر اور
دائرے اونکے اندر اور باہر بن سکتے ہیں مگر سوا اسکے یہہ بڑی بات اوسمیں ثابت کی گئی ہے کہ محیط دائرہ کا متعدد کئی
حصوں میں کسطرح تقسیم ہو سکتا ہے دائرہ کے اندر مثلث متساوی الاضلاع اور مربع اور مخمس اور مسدس وغیرہ کے

بنا سے محیط تین چار پانچ چھہ وغیرہ برابر حصوں میں تقسیم ہوتا ہی (۲۶ ش ۳ م) میں ثابت ہی کہ متساوی
دائروں کے از متساوی مرکزی زاوئے برابر قوسوں پر واقع ہوتے ہیں
اسواسطی ایک ہی دائرہ کے اندر وہ محاذی مساوی قوسوں کے ہوتے ہیں مرکزی زاویوں کی تضعیف کرنیسی اوسکے
محاذی قوسیں بھی تضعیف ہو جائینگی اسواسطی محاذی چہہ آٹھہ دس بارہ وغیرہ برابر حصوں میں محیط دائرہ تقسیم
ہو جائیگا۔ اگر ایک زاویہ قائمہ ۹۰ درجوں میں تقسیم کیا جاوے اور پھر ایک درجہ ۶۰ دقیقوں میں اور پھر ایک دقیقہ ۶۰
ثانیوں میں اور علی ہذا القیاس ساٹھہ ساٹھہ حصے کیے جائیں تو (نتیجہ ۲ ش ۳۲ م) کے حکم سے ہر ایک کثیر الاضلاع کے
زاویہ اندرونی کی مقدار عددوں میں دریافت ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک کثیر الاضلاع کے ن ضلعے ہیں
اور اوسکے برابر زاویوں میں سے ایک زاویہ کی مقدار ط ہی تو ن ط مجموعہ تمام داخلہ زاویوں کا ہوگا۔ لیکن
تمام داخلی زاوئے مع چار قائموں کے اتنی قائمے ہوتے ہیں کہ اونکی تعداد ضلعوں کی تعداد سی
دو چند ہوتی ہے اگر ک دو قائموں کو تعبیر کرے

$\therefore$ ن ط + ۲ک = ن ک

اور ن ط = ن ک − ۲ک = (ن − ۲) × ک

$\therefore$ ط = $\frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}}$. ک یہہ مقدار کثیر الاضلاع منتظم کے ایک زاویہ کی ہی جسکے ضلعوں کی تعداد ن ہی

اب اگر ن کو برابر ۳ و ۴ و ۵ و ۶ وغیرہ فرض کریں تو دو قائموں کی رقموں میں مقدار زاویہ کی معلوم
ہو جائیگی۔ پروقلس اپنی شرح اقلیدس میں لکھتا ہی کہ حکیم فیثاغورث نے اول اس بات کو دریافت
کیا تھا کہ تین اشکال منتظم ایسی ہیں کہ ایک نقطہ کے گرد اونکے زاویوں کی اضعاف اسطرح سطح مستوی
میں مل سکتی ہیں کہ اونکے درمیان خلا نرہے
اوپر بیان ہوا کہ ن ضلعے کے کثیر الاضلاع کے زاویہ اندرونی کے مقدار دو قائموں کی
رقموں میں اسطرح تعبیر ہوتی ہے کہ ط = $\frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}}$. ک
فرض کرو کہ ط۳ تین ضلعے کی شکل منتظم کے ایک زاویہ اندرونی کی مقدار کو تعبیر کرتا ہے تو اس
صورت میں ن = ۳ تو ط۳ = $\frac{۳ - ۲}{۳}$ ک = $\frac{\text{ک}}{۳}$ = ایک تہائی دو قائموں کی

اور $\therefore$ ۳ ط۳ = ک

۶ ط۳ = ۲ک

یعنے چہہ زاویے جسمین سے ہر ایک برابر مثلث متساوی الاضلاع کے ایک زاویہ اندرونی کے ہو ملکر برابر چار قائمون کے ہوتے ہین سو اسلئے چہہ مثلث متساوی الاضلاع ایک نقطہ کے گرد اسطرح مل سکتی ہے کہ اون کے درمیان کچہہ جگہ خالی نرہی۔ اسطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ چار مربع اور تین مسدس ایک نقطہ کے گرد اسطرح مل سکتے ہین کہ اونکے درمیان کچہہ جگہ خالی نرہے دائرہ کے اندر اور باہر جو اشکال منتظم بن سکتی ہین اونمین سے یونانیون کو معلوم تہا کہ مثلث اور مربع اور مخمس اور مسدس اور جو شکلین انسے متفرع ہون دائرہ کے اندر اور باہر بن سکتی ہین +

مسٹر گاس صاحب نے اپنی ایک کتاب مین لکہا ہے کہ خطوط مستقیم اور دوائر کی استعانت سے وہ کثیر الاضلاعین دائرہ کے اندر اور باہر بن سکتی ہے جسکے اضلاع کی تعداد ۲ن + ۱ ہو بشرطیکہ ۲ن + ۱ ایسا عدد ہو کہ سوا ایک کے کسی پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اس سوال کو کہ دلیل ہندسی سے ایک سترہ ضلعے کے کثیر الاضلاع منتظم دائرہ کے اندر بناؤ یعنی اوس صورت مین کہ ن = ۴ کے ہو اوسکو مسٹر لوری صاحب نے بہت تطویل کے ساتہہ لکہا ہم اوسکو کسی موقع پر لکہینگے

سوالات مقالہ چہارم

(۱) اس مقالہ کا مطلب اعظم کیا ہے - (۲) اس مقالہ کی شکل اول کی کس خیال سے ضرورت پڑی

(۳) مستقیم الاضلاع کے اندر اور باہر دائرہ بننے کے کیا معنی ہین

(۴) ثابت کرو کہ ایک معین پر دائرہ نہین کہنچ سکتا

(۵) کب ایک مستقیم الاضلاع کو دوسرے مستقیم الاضلاع کے اندر اور اوپر بنی ہوئی کہتے ہین

(۶) شکل چہارم کی یہہ صورت ثابت کرو کہ ایک دائرہ مثلث کے ایک ضلع اور دو ضلاع ممدودہ کو مس کرے

(۷) ایک مثلث کی اضلاع ۵ اور ۶ اور ۷ پیمانہ واحد مین ہین تو اوسکی دائرہ اندرونی اور بیرونی کا نصف قطر دریافت کرو

(۸) مثلثونکے اندر اور باہر دائرے جو بنائے جائین اون کے مرکز دریافت کرنیکی ترکیب بتاؤ اور

اور کس مثلث مین یہہ دو زاوئے منطبق ہوتے ہین وہ بھی بتلاؤ

(۹) کسطرح یہہ ثابت ہوتا ہے کہ مثلث متساوی الاضلاع کے اوپر جو دائرہ بنتا ہے اوسکا نصف قطر دوچند اوس دائرہ کے نصف قطر سے ہوتا ہے جو اوسکے اندر بنایا جائے

(۱۰) ایک ہی دائرہ کے اندر اور اوپر مثلث متساوی الاضلاع بنائی جائین تو اوپر کا مثلث متساوی الاضلاع دوچند اندر کے مثلث متساوی الاضلاع سے ہوگا

(۱۱) اگر مثلث متساوی الاضلاع کے اندر دائرہ بنایا جائے تو جو نقاط تماس مین خطوط ملانے سے مثلث پیدا ہوگا وہ مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

(۱۲) ایک ہی دائرہ کے اندر اور باہر جو مربعے بنائے جائین اونکی کیا نسبت ہوتی ہے

(۱۳) (۲۲ش ۳م) مین جسطرح ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے دو دو زاون کا برابر دو قائمون کے ہونا ثابت کیا ہے اوسیطرح اور زوج اضلاع کے کثیر الاضلاعون مین جو دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہون بتاؤ کہ اونکے مقابل کے دو دو زاوئے کسکے برابر ہونگے

(۱۴) دائرہ کے اندر جو مثلث کے ضلعون سے تین قطعے قطع ہوتے ہین تو اونکے زاوئے ملکر برابر چار قائمون کے ثابت کرو

(۱۵) قوس ربع دائرہ کی تثلیث کرو اور ثابت کرو جو ربعہ محیط کے برابر قوس ہو تو مجموان حصہ اوسکا تین برابر حصونمین تقسیم ہوجائیگا بشرطیکہ م اور ن صحیح عدد ہون

(۱۶) اگر دائرہ کے اندر ایک ذوار بعۃ الاضلاع بنی ہوئی ہو اور اوسکا ایک ضلع خارج کیا جائے تو زاویہ خارجہ برابر مقابل کے زاویہ داخلہ کے ہوتا ہے تو بتاؤ کہ یہہ بات زوج اضلاع کی کثیر الاضلاعون مین جو دائرہ کے اندر بنتی ہین ہوتی ہے یا نہین

(۱۷) کس متوازی الاضلاع کے اندر دائرہ بن سکتا ہے

(۱۸) دائرہ کے اندر مخمس بننا کس شکل عملی پر مشروط ہے

(۱۹) (ش ۴م) مین ثابت کرو کہ دو مثلث موافق شرط سوال کے ایک ہی شکل مین بن سکتی ہین

(۲۰) ۱۰ شکل ۴ م مین ثابت کرو کہ ب د ضلع معشر کا ہی جو دائرہ کلان مین بنایا جائے او ضلع مخمس ہے جو دائرہ خورد مین بنایا جائے

(۲۱) ۳ شکل ۴ م مین مماسون کا باہم ملنا نہین ثابت کیا اونکو ملنے کو کسطرح ثابت کرسکتے ہین

(۲۲) دسوین شکل مقالہ چہارم کی شکل مین اگر دائرہ کے نقاط تقاطع اور راس مین خطوط وصل کرین تو ایک اور مثلث برابر اور متساوی الزوایا پہلے مثلث کا بنجائیگا

(۲۳) ایک زاویہ قائمہ کو پانچ برابر حصون مین تقسیم کرو ایک قاعدہ معلوم پر ایک ایسا مثلث متساوی الساقین کسطرح بن سکتا ہے کہ اوسکا ہر ایک زاویہ قاعدہ کا سہ چند زاویہ راس سے ہو

(۲۴) (۱۰ شکل ۴ م) کی استعانت سے کون کونسی کثیر الاضلاع منتظم دائرہ کے اندر کہنچ سکتی ہین

(۲۵) ۱۰ شکل ۴ م مین جو مثلث بنا ہے اوسکی قاعدہ کے اطراف اور دائرہ کے ان دوسرے نقطہ تقاطع مین خطوط وصل کرین تو ان خطوط کے مربعون کا تفاوت برابر ہوگا مثلث کی ایک ساق کے مربع کے

(۲۶) شکل منتظم کی تعریف اقلیدس نے کیا لکہی ہے ؟ اگر ایک مخمس کے متبادلہ زاویون مین خطوط وصل کیے جائین تو جو شکل ستارہ کی سی پیدا ہوگی اوسپر تعریف مخمس منتظم کی صادق آتی ہے یا نہین ؟

(۲۷) دائرہ کے اندر جو مخمس منتظم بنایا جائے اوسکا ایک زاویہ برابر دو قائمون کے تین خمس کے ثابت کرو

(۲۸) اگر ایک مخمس منتظم کے دو ضلعے جو متصل کے خارج کیے جائین تو جس نقطہ پر وہ ملینگے وہان متبادلہ زاویہ کس مقدار کا پیدا ہوگا۔

(۲۹) دائرہ مین مخمس بنانے کی کوئی اور سیدہی ترکیب سوا اقلیدس کے ترکیب کے ہی ؟

(۳۰) دائرہ کے اوپر مسدس متساوی الاضلاع اور متساوی الزوایا بنانے کی ترکیب کیا ہے ؟

(۳۱) مسدس منتظم پر کس معنی کر متوازی الاضلاع ہونیکا اطلاق ہوتا ہے اور یہہ اطلاق اور زوج اضلاع کے کثیر الاضلاع منتظم پر کیونکر ہوسکتا ہے ؟

(۳۲) مثلث متساوی الاضلاع کے دائرہ کے اندر بنانے کی ترکیب کیون نہین اقلیدس نے لکہی اوسکی ضرورت ۲ شکل ۴ م مین پڑتی ہے اسلئے پیشتر اس شکل سے اوسکا بنانا چاہیے تہا ؟

(۳۳) ثابت کرو کہ مسدس کے اول و سوم اور پنجم زاویون مین دائرہ کے اندر خطوط وصل کرنے سے ایک مثلث متساوی الاضلاع پیدا ہوتا ہے

(۳۴) اگر مسدس کے اضلاع خارج ہو کر باہم ملائے جائین تو ملاپ کے نقطہ پر سب اوسکے ملکر برابر چار قائمون کے پیدا ہونگے

(۳۵) ایک ہی دائرہ کے اندر جو مسدس و مثلث متساوی الاضلاع بنائے جائین تو اوسکے مثلث کا رقبہ مسدس سے دو چند ہوگا

(۳۶) اگر ایک مثلث متساوی الاضلاع کا ایک ضلع ۶ انچہ کا ہو تو اوسکے اندر کے دائرہ کا نصف قطر کیا ہوگا

(۳۷) ایک دائرہ کا قطر ۱۲ انچہ کا ہو تو اوسکے اندر کے مسدس کا رقبہ دریافت کرو اور بتاؤ دائرہ کے اندرونی اور بیرونی مسدسون مین کیا فرق ہوتا ہے

(۳۸) ایک دائرہ کا نصف قطر واحد ہو تو بتاؤ اوسکے اندر فرق مربع اور مسدس منتظم کے ضلعونکا بڑا ہوگا یا مثلث متساوی الاضلاع اور مخمس کے ضلعون کا

(۳۹) دائرہ کا مسدس منتظم اندرونی بیرونی مسدس منتظم کی تین چوتھائی ہوتا ہے

(۴۰) اگر ۶ ش ۴ م کی شکل کو مان لین تو بتاؤ دائرہ کے اندر مثمن منتظم کس طرح بن سکتا ہے

(۴۱) مسدس منتظم کے تینون وتر جو ایک نقطہ پر ملتے ہون اونکے مربعونکا مجموعہ دس گنا ایک ضلع کے مربع کے ہوتا ہے

(۴۲) ایک مثمن کے داخلی زاوئے برابر بارہ قائمون کے ہوتے ہین

(۴۳) ایک مثمن منتظم کے اضلاع علی التبادل کو خارج کرین تو بتاؤ کونسی شکل پیدا ہوگی

(۴۴) جس مثمن منتظم کا ایک ضلع آٹھہ انچہ کا ہو اوسکا رقبہ کیا ہوگا

(۴۵) اگر مثمن غیر منتظم دائرہ کے اوپر بنے کی قابلیت رکھتی ہو تو ثابت کرو کہ اوسکے متبادل زاویونکے مجموعے آپس مین برابر ہونگے

(۴۶) ایک ن ضلعے کی کثیر الاضلاع منتظم دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے تو اوسکے ایک اوسکے مقدار کے لئے صورت جبریہ بیان کرو

(۴۷) ایسی کونسی تین اشکال منتظم ہین جو سطح مستوی کو بالکل احاطہ کرتے ہین اور یہہ بھی ثابت کرو کہ سوا

ان تین شکلون کی کوئی اور شکل نہین ہے جو ایک نقطہ کی گرد ملکر جگہ بالکل خالی نہین چہوڑتین

(۴۸) ہندسیہ مین زاویہ قائمہ کتنے برابر حصون مین تقسیم ہو سکتا ہے۔ اور اس بات کا کیا تعلق ہے اس بات سے کہ دائرہ کے اندر کتنی اشکال منتظمہ کا کہینچنا ممکن ہے

(۴۹) مقالہ چہارم کے سب شکلون کے ثبوت کو بیان کرو اور پہر ثابت کرو کہ اشکال متساوی الاضلاع جنکے اضلاع ۲ × ۲^ن اور ۳ × ۲^ن اور ۵ × ۲^ن اور ۱۵ × ۲^ن ہون دائرہ کی اندر کہینچ سکتے ہین جب ن کوئی عدد ان اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ وغیرہ مین سے ہو

(۵۰) دائرہ کا محیط چوبیس حصون مین فقط پرکار کے ذریعہ سے کسطرح تقسیم ہوتا ہے

(۵۱) ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر جو شکل مستقیم الاضلاع متساوی الاضلاع ہوگی وہ متساوی الزوایا بہی ہوگی اور یہہ بتلاؤ کہ اسکا عکس بہی صحیح ہے یا نہین

(۵۲) دائرہ کے ن ضلعے کی کثیر الاضلاع منتظم کا رقبہ ن گنا اوس مثلث کی رقبہ کی ہوتا ہے جسکا قاعدہ اوس کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ہے اور ارتفاع اوسکا برابر نصف قطر دائرہ کے ہے

(۵۳) اگر کثیر الاضلاع منتظم کے تین زاویون پر ایک دائرہ گذرے تو وہ ضرور باقی زاویون پر گذریگا

(۵۴) متشابہ کثیر الاضلاعین ہمیشہ متساوی الزوایا ہوتی ہین اور بتاؤ اسکا عکس بہی صحیح ہے

(۵۵) دائرہ کے اندر اشکال منتظم کی کہینچنے کیلئے اضلاع کی تعداد کی حدین علم ہندسہ مین کیا مقرر ہوئی ہین

(۵۶) دائرہ کی اندر گیارہ ضلعے کی شکل متساوی الاضلاع اور متساوی الزوایا کہینچنے کیلئے کیا دقتین علم ہندسہ مین واقع ہوتی ہین اور کسواسطے ہم یہہ کہا کرتے ہین کہ اس سوال کا حل کرنا علم ہندسہ کی قدرت سے باہر ہے اور یہہ بتلاؤ کس سبب سے یہہ بہت مشکل ہے کہ ایسے سوالات کا حل ہونا علم ہندسہ سے ناممکن ثابت کرین

تمام شد

شرح مقالہ چہارم